



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I AUTOMATYKI

Jacek Horiszny, Mirosław Mizan
Andrzej Skiba, Hocine Tiliouine

ZBIÓR ZADAŃ Z OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

Gdańsk 2009

Materiały zostały przygotowane w związku z realizacją projektu pt. „Zamawianie kształcenia na kierunkach technicznych, matematycznych i przyrodniczych – pilotaż” współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego Nr umowy: 46/DSW/4.1.2/2008 – zadanie 018240 w okresie od 21.08.2008 – 15.03.2012

SPIS TREŚCI

ZADANIA

I. OBWODY LINIOWE PRĄDU STAŁEGO	
1. Podstawowe prawa i pojęcia	5
2. Metoda podobieństwa i metoda superpozycji.....	11
3. Metoda potencjałów węzłowych	15
4. Zastosowanie twierdzenia Thevenina.....	20
II. OBWODY LINIOWE PRĄDU SINUSOIDALNEGO	
5. Obwody rozgałęzione	27
6. Rezonans w obwodach elektrycznych	33
7. Obwody jednofazowe	37
8. Obwody ze sprzężeniami magnetycznymi	42
9. Obwody trójfazowe symetryczne	45
10. Obwody trójfazowe niesymetryczne	61
III. PRZEBIEGI OKRESOWO ZMIENNE	
11. Wartości średnie i skuteczne przebiegów okresowych	69
12. Analiza harmoniczna	72
IV. UKŁADY AKTYWNE	
13. Obwody ze wzmacniaczami operacyjnymi	75
V. OBWODY NIELINIOWE	
14. Analiza obwodów nieliniowych	81

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA

I. OBWODY LINIOWE PRĄDU STAŁEGO	
1. Podstawowe prawa i pojęcia.....	89
2. Metoda podobieństwa i metoda superpozycji.....	100
3. Metoda potencjałów węzłowych	105
4. Zastosowanie twierdzenia Thevenina.....	110
II. OBWODY LINIOWE PRĄDU SINUSOIDALNEGO	
5. Obwody rozgałęzione	117
6. Rezonans w obwodach elektrycznych	130
7. Obwody jednofazowe	137
8. Obwody ze sprzężeniami magnetycznymi	148

9. Obwody trójfazowe symetryczne	153
10. Obwody trójfazowe niesymetryczne	172
III. PRZEBIEGI OKRESOWO ZMIENNE	
11. Wartości średnie i skuteczne przebiegów okresowych	184
12. Analiza harmoniczna	191
IV. UKŁADY AKTYWNE	
13. Obwody ze wzmacniaczami operacyjnymi	197
V. OBWODY NIELINIOWE	
14. Analiza obwodów nieliniowych	203
LITERATURA	210

ZADANIA

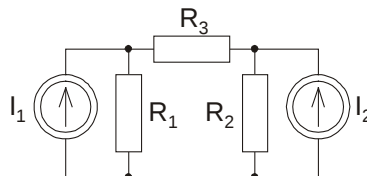
I. OBWODY LINIOWE PRĄDU STAŁEGO

1. PODSTAWOWE PRAWA I POJĘCIA

Zadanie 1.1

W przedstawionym na rys. 1.1 obwodzie obliczyć rozływ prądów, wykorzystując zamianę źródeł prądowych na napięciowe. Sporządzić bilans mocy obwodu.

Dane: $I_1=40\text{ A}$, $I_2=20\text{ A}$,
 $R_1=2\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$,
 $R_3=5\ \Omega$.

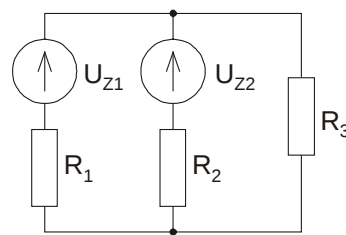


Rys. 1.1

Zadanie 1.2

W obwodzie przedstawionym na rys. 1.2 obliczyć rozływ prądów, wykorzystując zamianę źródeł napięciowych na prądowe. Sporządzić bilans mocy obwodu.

Dane: $U_{Z1}=120\text{ V}$, $U_{Z2}=110\text{ V}$,
 $R_1=2\ \Omega$, $R_2=3\ \Omega$,
 $R_3=6\ \Omega$.

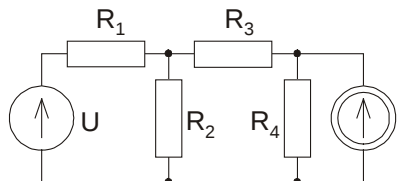


Rys. 1.2

Zadanie 1.3

Obliczyć rozływ prądów w obwodzie na rys. 1.3 wykorzystując zamianę źródeł na równoważne. Wykonać bilans mocy.

Dane: $U=96\text{ V}$, $I=15\text{ A}$,
 $R_1=1\ \Omega$, $R_2=8\ \Omega$,
 $R_3=1\ \Omega$, $R_4=8\ \Omega$.

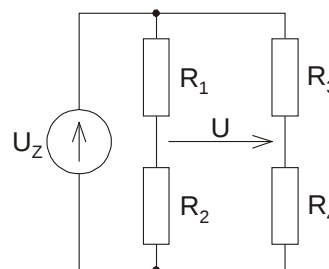


Rys. 1.3

Zadanie 1.4

W układzie przedstawionym na rys. 1.4 obliczyć napięcie U posługując się zależnością dla dzielnika napięcia.

Dane: $U_Z=48\text{ V}$, $R_1=12\ \Omega$,
 $R_2=18\ \Omega$, $R_3=15\ \Omega$,
 $R_4=9\ \Omega$.



Rys. 1.4

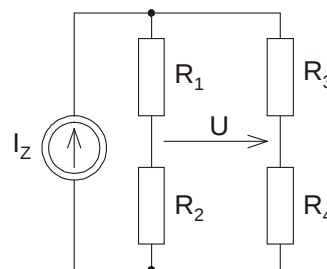
Zadanie 1.5

W układzie przedstawionym na rys. 1.5 obliczyć napięcie U posługując się zależnością dla dzielnika prądu.

Dane: $I_Z=12\text{ A}$, $R_1=18\ \Omega$,

$R_2=12\ \Omega$, $R_3=8\ \Omega$,

$R_4=12\ \Omega$.



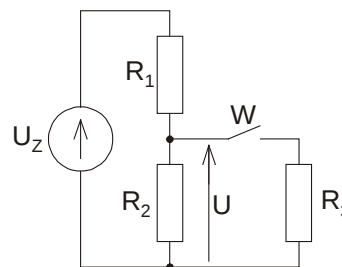
Rys. 1.5

Zadanie 1.6

Do dzielnika napięcia składającego się z rezystancji R_1 i R_2 doprowadzono napięcie U_Z – rys. 1.6. Obliczyć napięcie U na wyjściu dzielnika przy otwartym i zamkniętym łączniku W .

Dane: $U_Z=200\text{ V}$, $R_1=100\ \Omega$,

$R_2=300\ \Omega$, $R_3=300\ \Omega$.

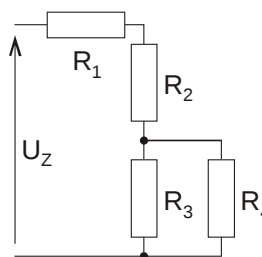


Rys. 1.6

Zadanie 1.7

W układzie przedstawionym na rys. 1.7 obliczyć napięcia na rezystancjach R_1 , R_2 , R_3 .

Dane: $U_Z=1125\text{ V}$, $R_1=15\ \Omega$, $R_2=5\text{ k}\Omega$, $R_3=5\text{ k}\Omega$, $R_4=5\text{ k}\Omega$.

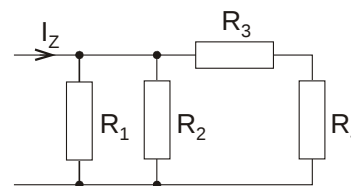


Rys. 1.7

Zadanie 1.8

W układzie przedstawionym na rys. 1.8 obliczyć prądy rezystancji R_1 , R_2 , R_3 .

Dane: $I_Z=0,7\text{ A}$, $R_1=800\ \Omega$, $R_2=400\ \Omega$, $R_3=150\ \Omega$, $R_4=50\ \Omega$.



Rys. 1.8

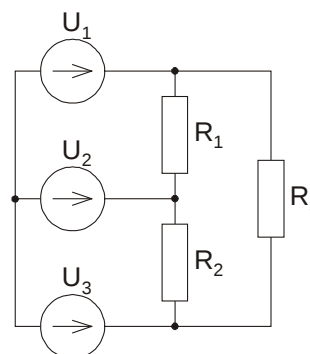
Zadanie 1.9

W obwodzie na rys. 1.9 obliczyć rozpyły prądów wykorzystując prawa Kirchhoffa. Wykonać bilans mocy.

Dane: $U_1=96\text{ V}$, $U_2=110\text{ V}$,

$U_3=120\text{ V}$, $R_1=2\ \Omega$,

$R_2=3\ \Omega$, $R_3=5\ \Omega$.

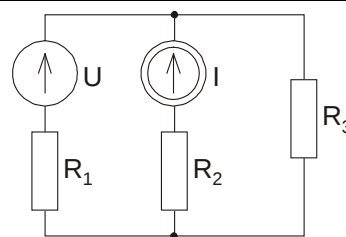


Rys. 1.9

Zadanie 1.10

Obliczyć rozpyły prądów w obwodzie na rys. 1.10 wykorzystując prawa Kirchhoffa. Wykonać bilans mocy.

Dane: $U=12\text{ V}$, $I=0,8\text{ A}$,
 $R_1=4\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$,
 $R_3=12\ \Omega$.

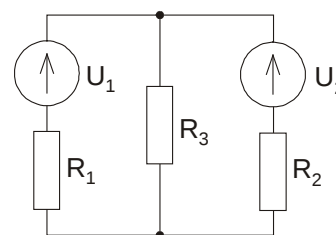


Rys. 1.10

Zadanie 1.11

Dla obwodu z rys. 1.11 sporządzić układ równań na podstawie praw Kirchhoffa, pozwalający wyznaczyć wszystkie prądy. Obliczyć rozpyły prądów i wykonać bilans mocy.

Dane: $U_1=120\text{ V}$, $U_2=80\text{ V}$,
 $R_1=4\ \Omega$, $R_2=20\ \Omega$, $R_3=10\ \Omega$.

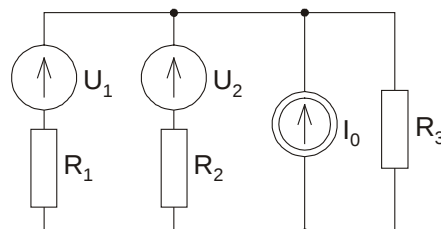


Rys. 1.11

Zadanie 1.12

Dla obwodu z rys. 1.12 sporządzić układ równań na podstawie praw Kirchhoffa, pozwalający wyznaczyć wszystkie prądy. Obliczyć rozpyły prądów i wykonać bilans mocy.

Dane: $U_1=24\text{ V}$, $U_2=20\text{ V}$, $I_0=0,5\text{ A}$,
 $R_1=2\ \Omega$, $R_2=5\ \Omega$, $R_3=20\ \Omega$.

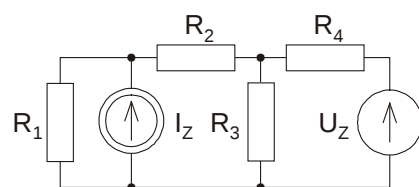


Rys. 1.12

Zadanie 1.13

Dla obwodu z rys. 1.13 sporządzić układ równań na podstawie praw Kirchhoffa, pozwalający wyznaczyć wszystkie prądy. Obliczyć rozpyły prądów i wykonać bilans mocy.

Dane: $U_Z=15\text{ V}$, $I_Z=15\text{ A}$,
 $R_1=8\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$, $R_3=8\ \Omega$, $R_4=1\ \Omega$.

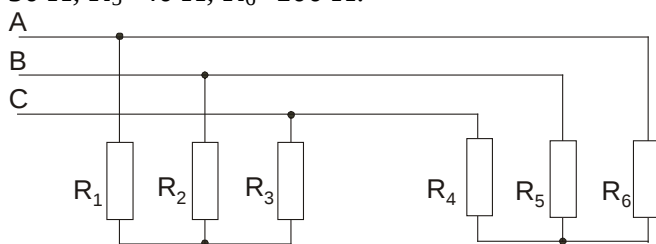


Rys. 1.13

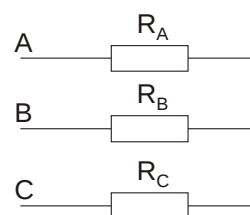
Zadanie 1.14

Dla układu przedstawionego na rys. 1.14 wyznaczyć rezystancje R_A , R_B , R_C zastępczej gwiazdy.

Dane: $R_1=10\ \Omega$, $R_2=20\ \Omega$, $R_3=5\ \Omega$,
 $R_4=50\ \Omega$, $R_5=40\ \Omega$, $R_6=100\ \Omega$.



Rys. 1.14

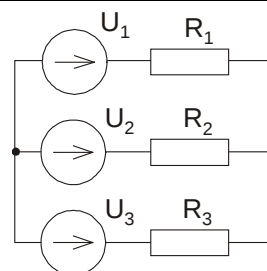


Zadanie 1.15

W obwodzie przedstawionym na rys. 1.15 obliczyć rozpyły prądów wykorzystując przekształcenie gwiazda-trójkąt. Sporządzić bilans mocy.

Dane: $U_1=120\text{ V}$, $U_2=125\text{ V}$, $U_3=110\text{ V}$

$R_1=5\text{ }\Omega$, $R_2=10\text{ }\Omega$, $R_3=10\text{ }\Omega$.

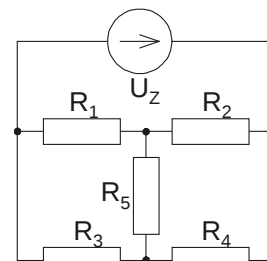


Rys. 1.15

Zadanie 1.16

W obwodzie, jak na rys. 1.16, obliczyć prąd pobierany ze źródła, wykorzystując przekształcenie gwiazda-trójkąt.

Dane: $U_Z=110\text{ V}$, $R_1=12\text{ }\Omega$, $R_2=116\text{ }\Omega$, $R_3=12\text{ }\Omega$, $R_4=56\text{ }\Omega$, $R_5=12\text{ }\Omega$.



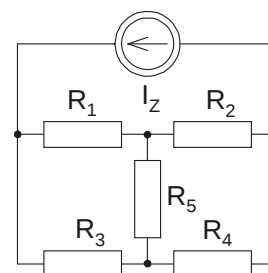
Rys. 1.16

Zadanie 1.17

W obwodzie na rys. 1.17 określić warunki, jakie muszą spełniać rezystancje R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , aby prąd w rezystancji R_5 był równy zero. Dobrać wartość rezystancji R_4 , spełniając ten warunek, następnie obliczyć rozpyły prądów i sporządzić bilans mocy.

Dane: $I_Z=2,4\text{ A}$, $R_1=40\text{ }\Omega$,

$R_2=10\text{ }\Omega$, $R_3=24\text{ }\Omega$,



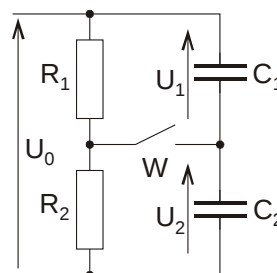
Rys. 1.17

Zadanie 1.18

W przedstawionym na rys. 1.18 obwodzie, zasilanym napięciem stałym, łącznik W był otwarty, a następnie został zamknięty. Obliczyć napięcia U_1 i U_2 na pojemnościach jakie się ustalą w obu tych przypadkach.

Dane: $U=100\text{ V}$, $R_1=15\text{ }\Omega$, $R_2=5\text{ }\Omega$,

$C_1=60\text{ nF}$, $C_2=40\text{ nF}$.



Rys. 1.18

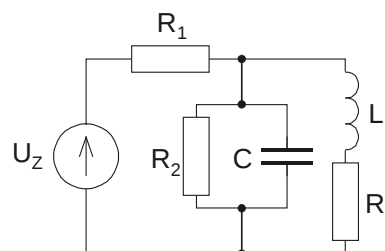
Zadanie 1.19

W przedstawionym na rys. 1.19 obwodzie prądu stałego obliczyć prąd płynący przez indukcyjność oraz napięcie na pojemności w stanie ustalonym.

Dane: $U_Z=14\text{ V}$, $R_1=1,2\text{ }\Omega$,

$R_2=18\text{ }\Omega$, $R_3=12\text{ }\Omega$,

$L=10\text{ mH}$, $C=4,7\text{ }\mu\text{F}$.

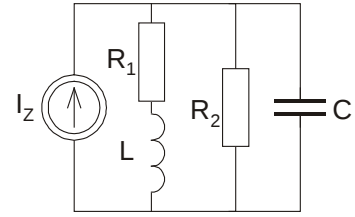


Rys. 1.19

Zadanie 1.20

W przedstawionym na rys. 1.20 obwodzie zasilanym prądem stałym obliczyć napięcie na pojemności oraz prąd indukcyjności w stanie ustalonym.

Dane: $I_z = 750 \text{ mA}$, $R_1 = 30 \text{ } \Omega$,
 $R_2 = 120 \text{ } \Omega$, $L = 200 \text{ mH}$,
 $C = 500 \text{ nF}$.

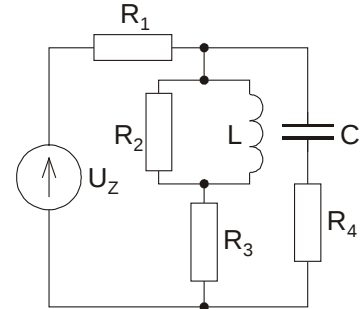


Rys. 1.20

Zadanie 1.21

W przedstawionym na rys. 1.21 obwodzie zasilanym napięciem stałym obliczyć prąd indukcyjności oraz napięcie na pojemności w stanie ustalonym.

Dane: $U_z = 24 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ } \Omega$, $R_2 = 18 \text{ } \Omega$,
 $R_3 = 30 \text{ } \Omega$, $R_4 = 50 \text{ } \Omega$,
 $L = 100 \text{ mH}$, $C = 1000 \text{ } \mu\text{F}$.

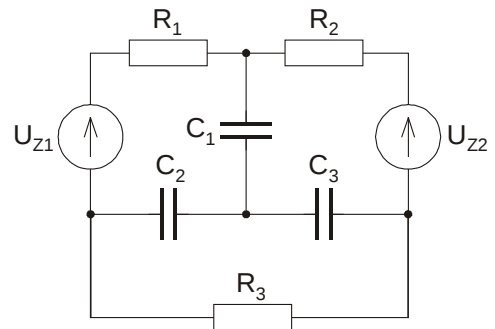


Rys. 1.21

Zadanie 1.22

Obliczyć napięcia występujące na wszystkich pojemnościach. Schemat układu przedstawiono na rys. 1.22. Założyć, że przed zbudowaniem obwodu pojemności nie były naładowane.

Dane: $U_{z1} = 30 \text{ V}$, $U_{z2} = 60 \text{ V}$,
 $R_1 = 20 \text{ } \Omega$, $R_2 = 30 \text{ } \Omega$, $R_3 = 70 \text{ } \Omega$,
 $C_1 = 2 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \text{ } \mu\text{F}$, $C_3 = 1 \text{ } \mu\text{F}$.

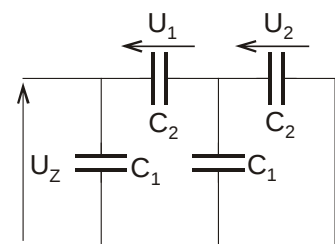


Rys. 1.22

Zadanie 1.23

Rys. 1.23 przedstawia model pojemnościowy łańcucha izolatorów (C_1 – pojemność izolatora względem ziemi, C_2 – pojemność jednego ogniwa izolatora). Obliczyć napięcia U_1 , U_2 , występujące na poszczególnych ogniwach łańcucha.

Dane: $U_z = 220 \text{ kV}$, $C_1 = 10 \text{ pF}$, $C_2 = 20 \text{ pF}$.

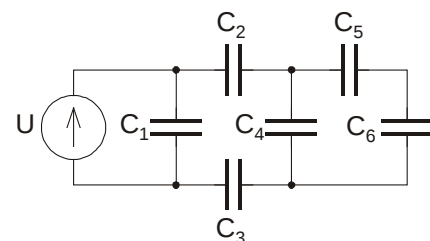


Rys. 1.23

Zadanie 1.24

W obwodzie przedstawionym na rys. 1.24 obliczyć, jakie największe napięcie U można przyłączyć do układu kondensatorów, aby na żadnym z nich nie wystąpiło napięcie wyższe od znamionowego.

Dane: $C_1 = 10 \text{ } \mu\text{F}$, $U_{C1n} = 110 \text{ kV}$,
 $C_2 = 20 \text{ } \mu\text{F}$, $U_{C2n} = 30 \text{ kV}$,
 $C_3 = 15 \text{ } \mu\text{F}$, $U_{C3n} = 63 \text{ kV}$,
 $C_4 = 50 \text{ } \mu\text{F}$, $U_{C4n} = 15 \text{ kV}$,
 $C_5 = 10 \text{ } \mu\text{F}$, $U_{C5n} = 10 \text{ kV}$,
 $C_6 = 8 \text{ } \mu\text{F}$, $U_{C6n} = 10 \text{ kV}$.

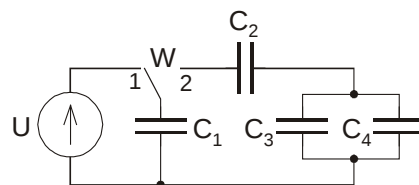


Rys. 1.24

Zadanie 1.25

W przedstawionym układzie (rys. 1.25) obliczyć napięcia na kondensatorach po zmianie pozycji łącznika W z 1 na 2. Przyjąć, że przed przełączeniem łącznika kondensatory C_2 , C_3 , C_4 nie były naładowane.

Dane: $U=100\text{ V}$, $C_1=200\text{ }\mu\text{F}$, $C_2=200\text{ }\mu\text{F}$,
 $C_3=150\text{ }\mu\text{F}$, $C_4=250\text{ }\mu\text{F}$.



Rys. 1.25

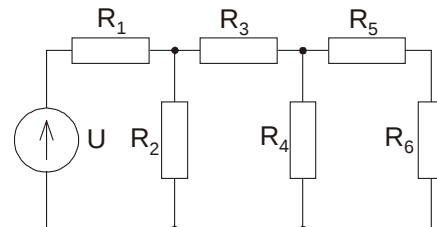
2. METODA PODOBIEŃSTWA I METODA SUPERPOZYCJI

METODA PODOBIEŃSTWA

Zadanie 2.1

Metodą podobieństwa obliczyć rozpyw prądów w gałęziach oraz sporządzić bilans mocy. Schemat układu przedstawiono na rys. 2.1.

Dane: $U=160\text{ V}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=6\ \Omega$, $R_3=1\ \Omega$, $R_4=10\ \Omega$,
 $R_5=1\ \Omega$, $R_6=9\ \Omega$.

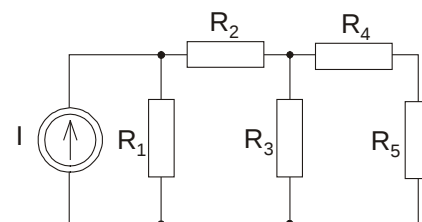


Rys. 2.1

Zadanie 2.2

W obwodzie przedstawionym na rys. 2.2 metodą podobieństwa obliczyć rozpyw prądów w gałęziach oraz sporządzić bilans mocy.

Dane: $I=8\text{ A}$, $R_1=15\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$, $R_3=6\ \Omega$, $R_4=4\ \Omega$, $R_5=8\ \Omega$.

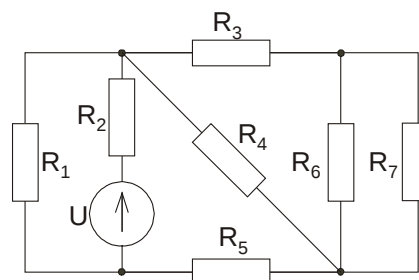


Rys. 2.2

Zadanie 2.3

Dla przedstawionego na rys. 2.3 obwodu wyznaczyć prądy we wszystkich gałęziach obwodu, stosując metodę podobieństwa. Wykonać bilans mocy.

Dane: $U=600\text{ V}$, $R_1=250\ \Omega$, $R_2=400\ \Omega$, $R_3=500\ \Omega$, $R_4=100\ \Omega$,
 $R_5=50\ \Omega$, $R_6=200\ \Omega$, $R_7=800\ \Omega$.

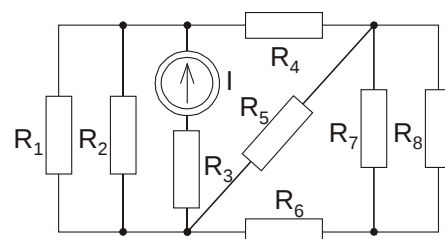


Rys. 2.3

Zadanie 2.4

Wyznaczyć prądy we wszystkich gałęziach obwodu przedstawionego na rys. 2.4 stosując metodę podobieństwa. Wykonać bilans mocy.

Dane: $I=6\text{ A}$, $R_1=34\ \Omega$, $R_2=42,5\ \Omega$, $R_3=2\ \Omega$, $R_4=4\ \Omega$,
 $R_5=11\ \Omega$, $R_6=10\ \Omega$, $R_7=30\ \Omega$, $R_8=20\ \Omega$.

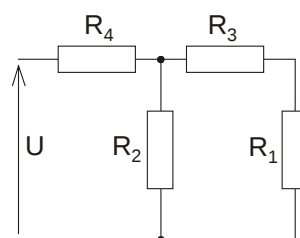


Rys. 2.4

Zadanie 2.5

W przedstawionym na rys. 2.5 obwodzie w rezystancji R_1 płynie prąd $I_1=2\text{ A}$ i wydzielą się w nim moc $P_1=320\text{ W}$. Obliczyć, jakie w tych warunkach jest napięcie zasilające U oraz jaka byłaby wartość prądu I_1 i mocy P_1 dla $U=220\text{ V}$. Zastosować metodę podobieństwa.

Dane: $R_2=40\ \Omega$, $R_3=5\ \Omega$, $R_4=4\ \Omega$.

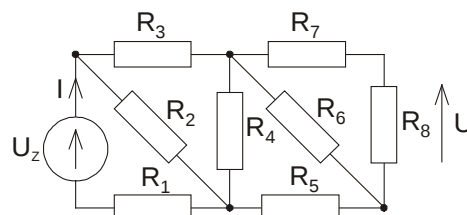


Rys. 2.5

Zadanie 2.6

Obliczyć prąd I pobierany ze źródła oraz napięcie U dla $U_Z = 12 \text{ V}$. Ile powinno wynosić napięcie zasilania U_Z aby $U = 12 \text{ V}$. Schemat układu przedstawiono na rys. 2.6.

Dane: $U_Z = 12 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $R_3 = 0,4 \Omega$, $R_4 = 24 \Omega$,
 $R_5 = 4 \Omega$, $R_6 = 30 \Omega$, $R_7 = 4 \Omega$, $R_8 = 16 \Omega$.

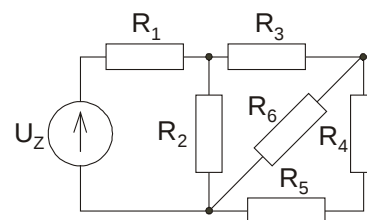


Rys. 2.6

Zadanie 2.7

W przedstawionym na rys. 2.7 obwodzie napięcie na rezystancji R_4 wynosi 3 V . Obliczyć napięcie U_Z źródła, prąd i moc źródła. Jak zmieni się moc oddawana ze źródła, jeżeli napięcie U_Z wzrośnie 5-krotnie?

Dane: $R_1 = 2,4 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$, $R_5 = 2 \Omega$, $R_6 = 2,5 \Omega$.

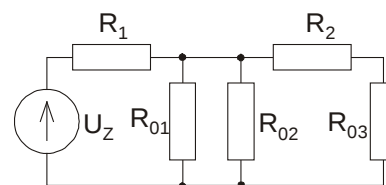


Rys. 2.7

Zadanie 2.8

W przedstawionym na rys. 2.8 układzie moc wydzielana w odbiorniku o rezystancji R_{03} wynosi $P_{03} = 133 \text{ W}$. Obliczyć moce P_{01} , P_{02} odbiorników o rezystancjach R_{01} i R_{02} oraz napięcie zasilające U_Z . Jaka byłaby moc odbiorników, gdyby napięcie zasilające wynosiło 20 V ?

Dane: $R_1 = 0,2 \Omega$, $R_2 = 0,1 \Omega$, $R_{01} = 1,6 \Omega$, $R_{02} = 2,2 \Omega$, $R_{03} = 2,35 \Omega$.

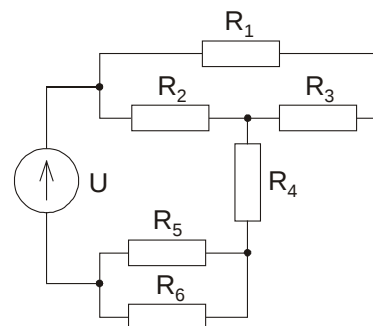


Rys. 2.8

Zadanie 2.9

W przedstawionym na rys. 2.9 obwodzie napięcie na rezystancji R_5 jest równe 120 V . Obliczyć prądy we wszystkich gałęziach oraz napięcie zasilające U .

Dane: $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 12 \Omega$, $R_6 = 4 \Omega$.

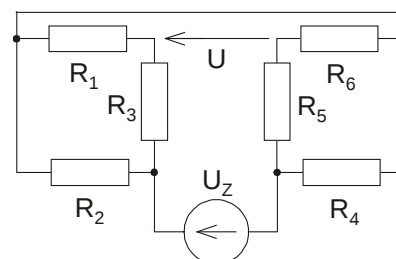


Rys. 2.9

Zadanie 2.10

W przedstawionym na rys. 2.10 obwodzie obliczyć napięcie U oraz prąd I pobierany ze źródła.

Dane: $U_Z = 44 \text{ V}$, $R_1 = 40 \Omega$, $R_2 = 120 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 120 \Omega$,
 $R_5 = 35 \Omega$, $R_6 = 45 \Omega$.

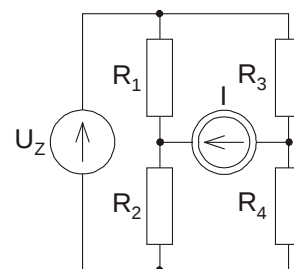


Rys. 2.10

METODA SUPERPOZYCJI**Zadanie 2.11**

W podanym na rys. 2.11 układzie obliczyć rozptyw prądów metodą superpozycji. Sporządzić bilans mocy.

Dane: $U_Z=12\text{ V}$, $I=0,24\text{ A}$, $R_1=75\ \Omega$, $R_2=50\ \Omega$, $R_3=100\ \Omega$, $R_4=50\ \Omega$.

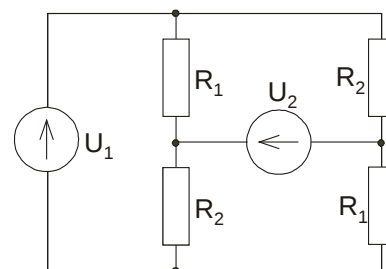


Rys. 2.11

Zadanie 2.12

W podanym na rys. 2.12 układzie obliczyć rozptyw prądów metodą superpozycji.

Dane: $U_1=360\text{ V}$, $U_2=270\text{ V}$, $R_1=60\ \Omega$, $R_2=40\ \Omega$.

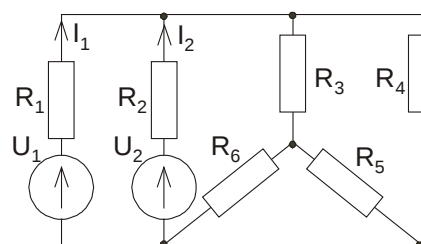


Rys. 2.12

Zadanie 2.13

W układzie podanym na rys. 2.13 obliczyć prądy I_1 i I_2 stosując metodę superpozycji.

Dane: $U_1=2\text{ V}$, $U_2=2\text{ V}$, $R_1=0,5\ \Omega$, $R_2=0,5\ \Omega$, $R_3=1,2\ \Omega$, $R_4=1\ \Omega$, $R_5=1,2\ \Omega$, $R_6=1,2\ \Omega$.

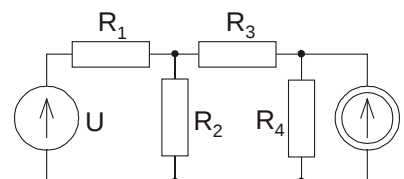


Rys. 2.13

Zadanie 2.14

W przedstawionym na rys. 2.14 układzie obliczyć rozptyw prądów stosując metodę superpozycji i metodę podobieństwa.

Dane: $U=96\text{ V}$, $I=1,5\text{ A}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=8\ \Omega$, $R_3=1\ \Omega$, $R_4=8\ \Omega$.

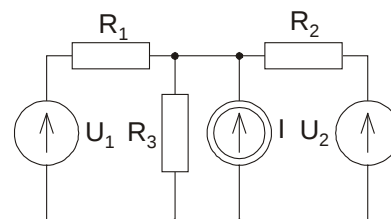


Rys. 2.14

Zadanie 2.15

W układzie przedstawionym na rys. 2.15 obliczyć rozptyw prądów metodą superpozycji oraz wykonać bilans mocy.

Dane: $U_1=2\text{ V}$, $R_1=2\ \Omega$, $U_2=20\text{ V}$, $R_2=5\ \Omega$, $I=3\text{ A}$, $R_3=10\ \Omega$.

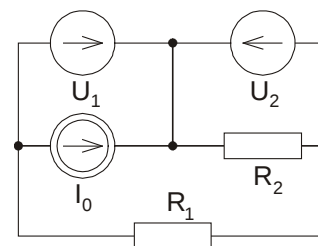


Rys. 2.15

Zadanie 2.16

W układzie przedstawionym na rys. 2.16 obliczyć rozptyw prądów metodą superpozycji oraz wykonać bilans mocy.

Dane: $U_1=10\text{ V}$, $R_1=10\ \Omega$, $U_2=20\text{ V}$, $R_2=5\ \Omega$, $I_0=2\text{ A}$, $R_3=10\ \Omega$.

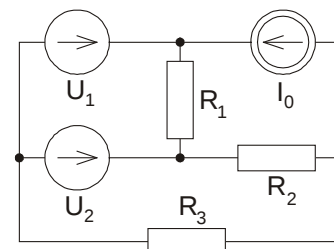


Rys. 2.16

Zadanie 2.17

W układzie przedstawionym na rys. 2.17 obliczyć rozptyw prądów metodą superpozycji oraz wykonać bilans mocy.

Dane: $U_1=20\text{ V}$, $R_1=5\ \Omega$, $U_2=10\text{ V}$, $R_2=2\ \Omega$, $I_0=1.5\text{ A}$, $R_3=8\ \Omega$.

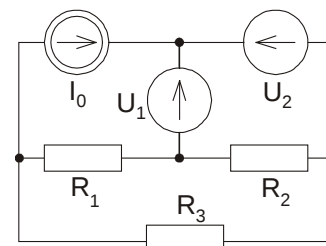


Rys. 2.17

Zadanie 2.18

W układzie przedstawionym na rys. 2.18 obliczyć rozptyw prądów metodą superpozycji oraz wykonać bilans mocy.

Dane: $U_1=12\text{ V}$, $R_1=3\ \Omega$, $U_2=20\text{ V}$, $R_2=4\ \Omega$, $I_0=1.33\text{ A}$, $R_3=5\ \Omega$.

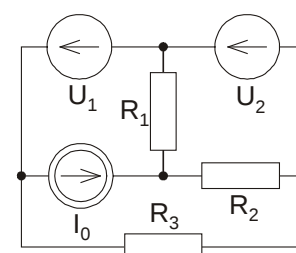


Rys. 2.18

Zadanie 2.19

W układzie przedstawionym na rys. 2.19 obliczyć rozptyw prądów metodą superpozycji oraz wykonać bilans mocy.

Dane: $U_1=10\text{ V}$, $R_1=5\ \Omega$, $U_2=20\text{ V}$, $R_2=5\ \Omega$, $I=2\text{ A}$, $R_3=10\ \Omega$.

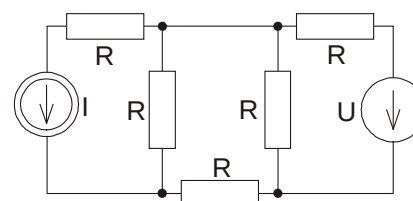


Rys. 2.19

Zadanie 2.20

W układzie przedstawionym na rys. 2.20 obliczyć rozptyw prądów metodą superpozycji oraz wykonać bilans mocy.

Dane: $U=20\text{ V}$, $I=3\text{ A}$, $R=5\ \Omega$.



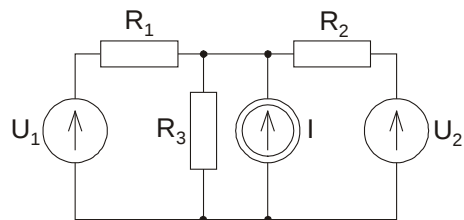
Rys. 2.20

3. METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

Zadanie 3.1

W obwodzie przedstawionym na rys. 3.1 obliczyć rozptyw prądów oraz wykonać bilans mocy. Wykorzystać metodę potencjałów węzłowych.

Dane: $U_1=2\text{ V}$, $R_1=2\ \Omega$, $U_2=20\text{ V}$, $R_2=5\ \Omega$,
 $I=3\text{ A}$, $R_3=10\ \Omega$.



Rys. 3.1

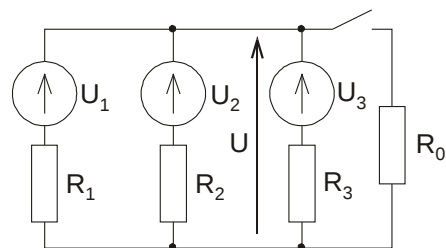
Zadanie 3.2

Stosując metodę potencjałów węzłowych, obliczyć napięcie U , rozptyw prądów i sporządzić bilans mocy dla obwodu przedstawionego na rys. 3.2 w przypadku:

- a) łącznika otwartego,
- b) łącznika zamkniętego.

Sprawdzić bilans mocy.

Dane: $U_1=24\text{ V}$, $U_2=22\text{ V}$, $U_3=23\text{ V}$,
 $R_1=0,3\ \Omega$, $R_2=0,5\ \Omega$, $R_3=0,4\ \Omega$, $R_0=4\ \Omega$.

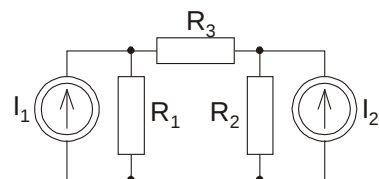


Rys. 3.2

Zadanie 3.3

W przedstawionym na rys. 3.3 obwodzie obliczyć rozptyw prądów wykorzystując metodę potencjałów węzłowych oraz wykonać bilans mocy.

Dane: $I_1=40\text{ A}$, $I_2=20\text{ A}$, $R_1=2\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$, $R_3=5\ \Omega$.

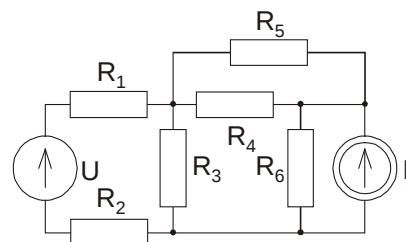


Rys. 3.3

Zadanie 3.4

W obwodzie przedstawionym na rys. 3.4 obliczyć rozptyw prądów wykorzystując metodę potencjałów węzłowych oraz wykonać bilans mocy.

Dane: $U=96\text{ V}$, $I=12\text{ A}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$, $R_3=8\ \Omega$,
 $R_4=8\ \Omega$, $R_5=2\ \Omega$, $R_6=8\ \Omega$.

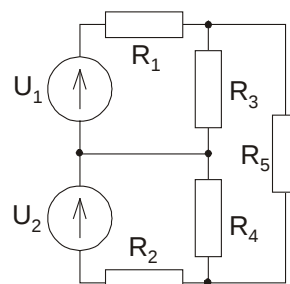


Rys. 3.4

Zadanie 3.5

Obliczyć rozptyw prądów i sporządzić bilans mocy. Schemat układu przedstawiono na rys. 3.5.

Dane: $U_1=110\text{ V}$, $U_2=110\text{ V}$, $R_1=2\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$,
 $R_3=10\ \Omega$, $R_4=8\ \Omega$, $R_5=18\ \Omega$.

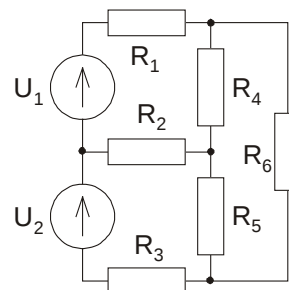


Rys. 3.5

Zadanie 3.6

Obliczyć rozpyły prądów i sporządzić bilans mocy. Schemat układu przedstawiono na rys. 3.6.

Dane: $U_1=110\text{ V}$, $U_2=110\text{ V}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$,
 $R_3=1\ \Omega$, $R_4=10\ \Omega$, $R_5=8\ \Omega$, $R_6=18\ \Omega$.

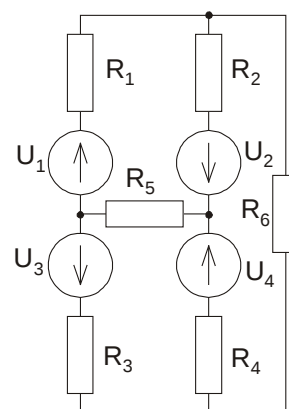


Rys. 3.6

Zadanie 3.7

W przedstawionym na rys. 3.7 obwodzie obliczyć rozpyły prądów oraz sporządzić bilans mocy.

Dane: $U_1=22\text{ V}$, $U_2=25\text{ V}$, $U_3=22\text{ V}$, $U_4=25\text{ V}$,
 $R_1=1\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $R_3=3\ \Omega$, $R_4=4\ \Omega$, $R_5=10\ \Omega$, $R_6=5\ \Omega$.

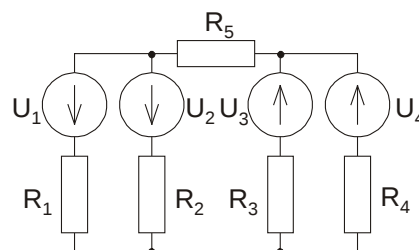


Rys. 3.7

Zadanie 3.8

W przedstawionym na rys. 3.8 obwodzie obliczyć rozpyły prądów oraz sporządzić bilans mocy.

Dane: $U_1=12\text{ V}$, $U_2=12\text{ V}$, $U_3=15\text{ V}$, $U_4=15\text{ V}$,
 $R_1=1\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $R_3=3\ \Omega$, $R_4=4\ \Omega$, $R_5=5\ \Omega$.

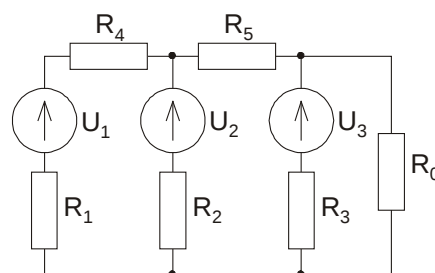


Rys. 3.8

Zadanie 3.9

Obliczyć moc odbiornika o rezystancji R_0 oraz moc źródeł stosując metodę potencjałów węzłowych. Schemat układu przedstawiono na rys. 3.9.

Dane: $U_1=24\text{ V}$, $U_2=22\text{ V}$, $U_3=22\text{ V}$,
 $R_1=0,5\ \Omega$, $R_2=0,4\ \Omega$, $R_3=0,5\ \Omega$,
 $R_4=0,1\ \Omega$, $R_5=0,1\ \Omega$, $R_0=4\ \Omega$.

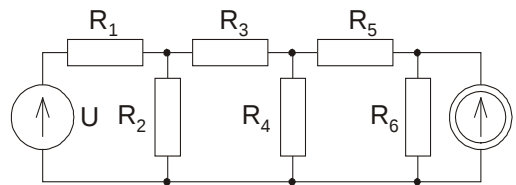


Rys. 3.9

Zadanie 3.10

W układzie przedstawionym na rys. 3.10 obliczyć rozpyły prądów metodą potencjałów węzłowych. Sporządzić bilans mocy.

Dane: $U=200\text{ V}$, $I=22\text{ A}$, $R_1=0,4\ \Omega$, $R_2=2,5\ \Omega$,
 $R_3=0,2\ \Omega$, $R_4=2\ \Omega$, $R_5=0,25\ \Omega$, $R_6=10\ \Omega$.

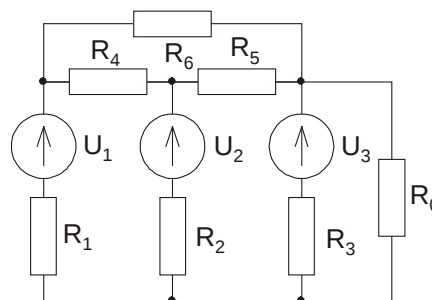


Rys. 3.10

Zadanie 3.11

W układzie przedstawionym na rys. 3.11 obliczyć rozpyły prądów metodą potencjałów węzłowych. Sporządzić bilans mocy.

Dane: $U_1=24\text{ V}$, $U_2=22\text{ V}$, $U_3=22\text{ V}$,
 $R_1=0,5\ \Omega$, $R_2=0,4\ \Omega$, $R_3=0,5\ \Omega$, $R_4=0,1\ \Omega$,
 $R_5=0,1\ \Omega$, $R_6=0,3\ \Omega$, $R_0=4\ \Omega$.

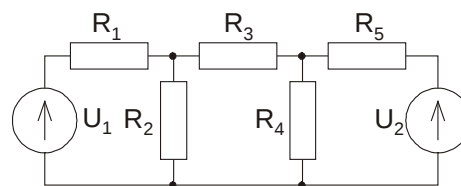


Rys. 3.11

Zadanie 3.12

W układzie przedstawionym na rys. 3.12 obliczyć rozpyły prądów stosując metodę potencjałów węzłowych i wykonać bilans mocy.

Dane: $U_1=110\text{ V}$, $U_2=120\text{ V}$, $R_1=0,44\ \Omega$, $R_2=4\ \Omega$,
 $R_3=0,8\ \Omega$, $R_4=5\ \Omega$, $R_5=0,6\ \Omega$.

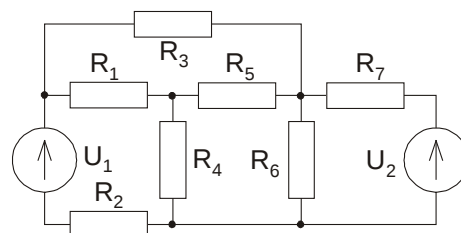


Rys. 3.12

Zadanie 3.13

Stosując metodę potencjałów węzłowych obliczyć rozpyły prądów. Wykonać bilans mocy. Schemat układu przedstawiono na rys. 3.13.

Dane: $U_1=200\text{ V}$, $U_2=220\text{ V}$, $R_1=2,5\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$, $R_3=2,5\ \Omega$,
 $R_4=8\ \Omega$, $R_5=2,5\ \Omega$, $R_6=10\ \Omega$, $R_7=1\ \Omega$.

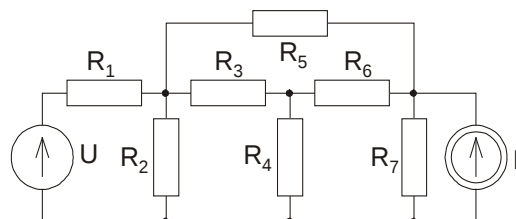


Rys. 3.13

Zadanie 3.14

W obwodzie przedstawionym na rys. 3.14 obliczyć rozpyły prądów metodą potencjałów węzłowych. Sporządzić bilans mocy.

Dane: $U=50\text{ V}$, $I=5\text{ A}$, $R_1=0,2\ \Omega$, $R_2=5\ \Omega$, $R_3=0,4\ \Omega$,
 $R_4=4\ \Omega$, $R_5=0,25\ \Omega$, $R_6=0,4\ \Omega$, $R_7=10\ \Omega$.

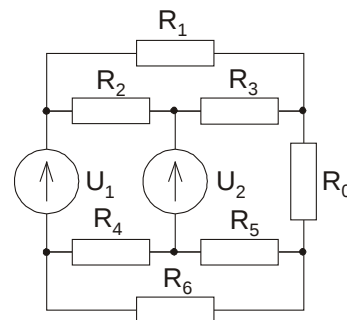


Rys. 3.14

Zadanie 3.15

W układzie przedstawionym na rys. 3.15 obliczyć rozpyły prądów metodą potencjałów węzłowych. Sporządzić bilans mocy.

Dane: $U_1=110\text{ V}$, $U_2=96\text{ V}$, $R_1=0,4\ \Omega$, $R_2=0,2\ \Omega$, $R_3=0,3\ \Omega$,
 $R_4=0,2\ \Omega$, $R_5=0,2\ \Omega$, $R_6=0,3\ \Omega$, $R_0=3\ \Omega$.

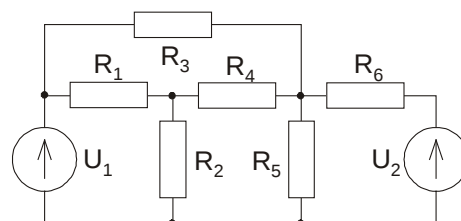


Rys. 3.15

Zadanie 3.16

Stosując metodę potencjałów węzłowych obliczyć rozpyły prądów oraz wykonać bilans mocy. Schemat obwodu przedstawiono na rys. 3.16.

Dane: $U_1=200\text{ V}$, $U_2=220\text{ V}$, $R_1=2,5\ \Omega$, $R_2=8\ \Omega$, $R_3=2,5\ \Omega$,
 $R_4=2,5\ \Omega$, $R_5=10\ \Omega$, $R_6=1\ \Omega$.

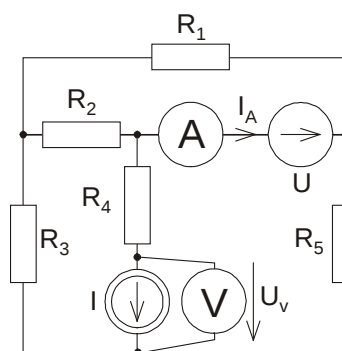


Rys. 3.16

Zadanie 3.17

W przedstawionym na rys. 3.17 obwodzie obliczyć wskazania przyrządów pomiarowych stosując metodę potencjałów węzłowych.

Dane: $U=12\text{ V}$, $I=1,5\text{ A}$, $R_1=5\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$,
 $R_3=4\ \Omega$, $R_4=20\ \Omega$, $R_5=10\ \Omega$.

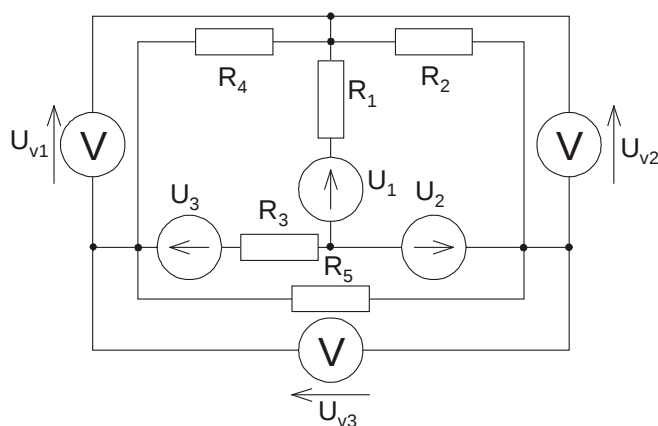


Rys. 3.17

Zadanie 3.18

W układzie podanym na rys. 3.18 obliczyć wskazania woltomierzy wykorzystując metodę potencjałów węzłowych.

Dane: $U_1=48\text{ V}$, $U_2=12\text{ V}$, $U_3=24\text{ V}$,
 $R_1=2,5\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $R_3=2\ \Omega$,
 $R_4=4\ \Omega$, $R_5=8\ \Omega$.



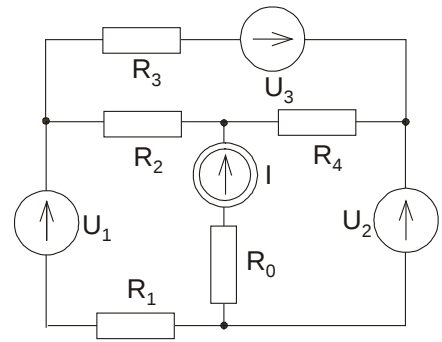
Rys. 3.18

Zadanie 3.19

Obwód przedstawiony na rys. 3.19 rozwiązać metodą potencjałów węzłowych. Sporządzić bilans mocy.

Dane: $U_1=40\text{ V}$, $U_2=30\text{ V}$, $U_3=20\text{ V}$, $I=1\text{ A}$,

$R_0=2\ \Omega$, $R_1=4\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $R_3=5\ \Omega$, $R_4=5\ \Omega$.



Rys. 3.19

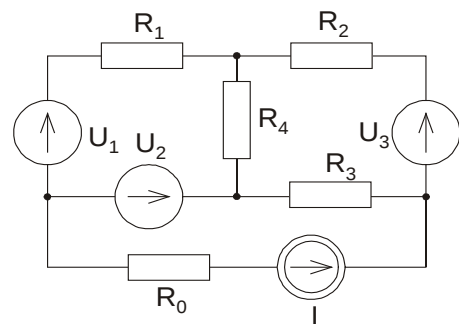
Zadanie 3.20

W podanym na rys. 3.20 obwodzie wyznaczyć prądy w gałęziach metodą potencjałów węzłowych. Wykonać bilans mocy.

Dane: $U_1=30\text{ V}$, $U_2=20\text{ V}$, $U_3=24\text{ V}$, $I=50\text{ mA}$,

$R_0=0,2\text{ k}\Omega$, $R_1=1\text{ k}\Omega$, $R_2=1,5\text{ k}\Omega$,

$R_3=0,68\text{ k}\Omega$, $R_4=1,2\text{ k}\Omega$.

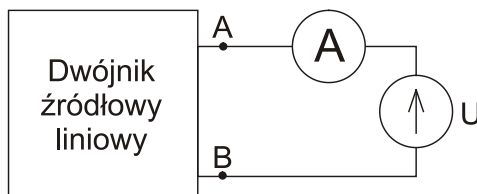


Rys. 3.20

4. METODA WYKORZYSTUJĄCA TWIERDZENIE THEVENINA

Zadanie 4.1

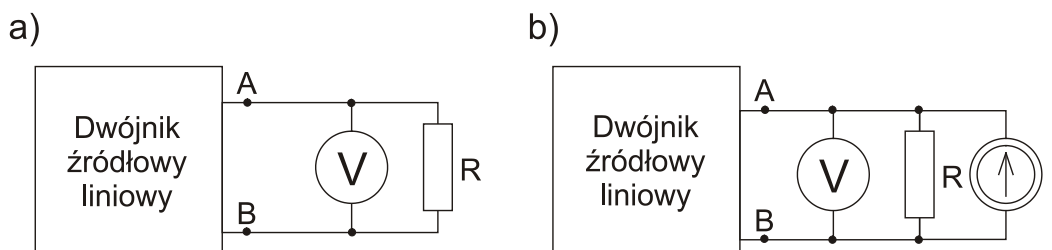
Do zacisków A-B obwodu elektrycznego przedstawionego na rys. 4.1 (dwójnika źródłowego liniowego) przyłączono idealne źródło napięcia $U=120\text{ V}$. Amperomierz wskazał prąd $I_1=10\text{ A}$. Po zmniejszeniu napięcia źródła U o $\Delta U=10\text{ V}$ wskazanie amperomierza wzrosło do $I_2=30\text{ A}$. Obliczyć napięcia U_{AB} między zaciskami bez obciążenia (przy rozwartych zaciskach) i przy obciążeniu prądem $I_2=45\text{ A}$.



Rys. 4.1

Zadanie 4.2

Woltomierz przyłączony do zacisków A-B dwójnika źródłowego liniowego, obciążonego rezystancją $R=9\ \Omega$ (rys. 4.2a), wskazał napięcie $U=18\text{ V}$. Po przyłączeniu do zacisków A-B źródła prądu $I=2\text{ A}$ (rys. 4.2b) wskazanie zwiększyło się o $\Delta U=4,5\text{ V}$. Obliczyć parametry U_T , R_T zastępczego źródła napięcia dla tego dwójnika.



Rys. 4.2

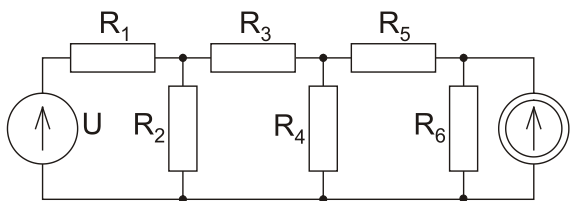
Zadanie 4.3

Do rzeczywistego źródła napięcia o parametrach U_w , R_w raz przyłączono rezystancję R , a następnie rezystancję $2,25R$. W obu przypadkach stwierdzono taki sam pobór mocy przez dołączony odbiornik. Obliczyć stosunek R_w/R .

Zadanie 4.4

Wykorzystując twierdzenie Thevenina obliczyć prąd płynący przez rezystancję R_4 . Schemat układu przedstawiono na rys. 4.3.

Dane: $U=24\text{ V}$, $I=12\text{ A}$, $R_1=0,12\ \Omega$, $R_2=4\ \Omega$, $R_3=0,15\ \Omega$, $R_4=3\ \Omega$, $R_5=0,16\ \Omega$, $R_6=1,8\ \Omega$.



Rys. 4.3

Zadanie 4.5

W układzie podanym na rys. 4.4 obliczyć prądy I_2 i I_3 stosując twierdzenie Thevenina.

Dane: $U_1=2\text{ V}$, $U_2=1\text{ V}$, $R_1=2\ \Omega$, $R_2=3\ \Omega$, $R_3=4\ \Omega$, $R_4=1\ \Omega$.

Zadanie 4.6

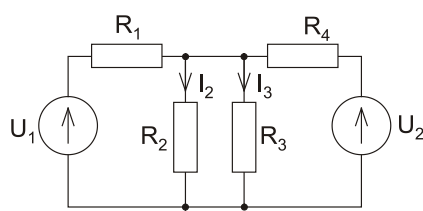
W przedstawionym na rys. 4.5 obwodzie obliczyć prąd I wykorzystując twierdzenie Thevenina.

Dane: $U=100\text{ V}$, $R_1=8\ \Omega$, $R_2=13\ \Omega$, $R_3=7\ \Omega$, $R_4=10\ \Omega$, $R_5=18\ \Omega$, $R_6=15\ \Omega$, $R_7=8\ \Omega$, $R_8=18\ \Omega$, $R_9=1\ \Omega$, $R_{10}=15\ \Omega$, $R_{11}=6\ \Omega$.

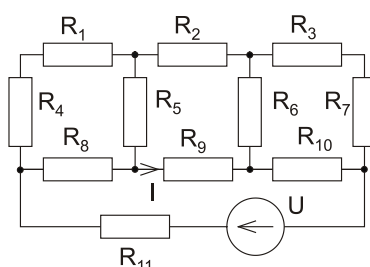
Zadanie 4.7

W przedstawionym na rys. 4.6 obwodzie obliczyć wartość rezystancji R_4 dla której nie będzie płynął prąd w gałęzi AB.

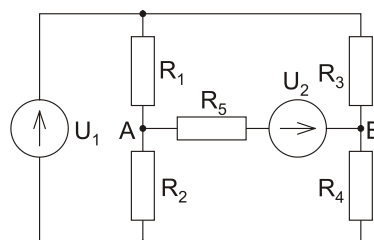
Dane: $U_1=12\text{ V}$, $U_2=1\text{ V}$, $R_1=200\ \Omega$, $R_2=400\ \Omega$, $R_3=300\ \Omega$, $R_5=20\ \Omega$.



Rys. 4.4



Rys. 4.5



Rys. 4.6

Zadanie 4.8

Stosując twierdzenie Thevenina w układzie przedstawionym na rys. 4.7 obliczyć wartość rezystancji R_2 , jeżeli znany jest prąd przez nią płynący.

Dane: $U=3\text{ V}$, $I_2=0,1\text{ A}$, $R_0=2\ \Omega$, $R_1=5\ \Omega$.

Zadanie 4.9

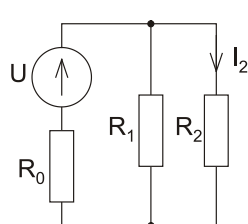
W obwodzie przedstawionym na rys. 4.8 obliczyć wartość prądu źródła prądowego I tak, aby $I_0=1,5\text{ A}$.

Dane: $U=12\text{ V}$, $R_1=0,2\ \Omega$, $R_2=120\ \Omega$, $R_3=30\ \Omega$, $R_4=20\ \Omega$, $R_5=70\ \Omega$, $R_6=30\ \Omega$.

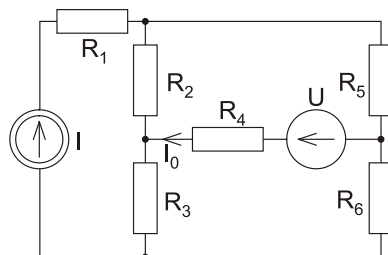
Zadanie 4.10

Wykorzystując twierdzenie Thevenina obliczyć wartość rezystancji R_2 , dla której napięcie na źródle prądowym I_2 będzie równe zero. Schemat układu przedstawiono na rys. 4.9.

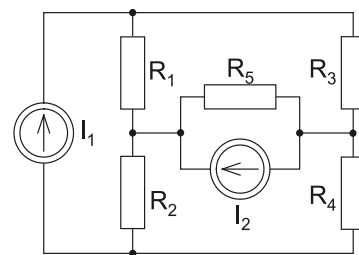
Dane: $R_1=10\ \Omega$, $R_3=5\ \Omega$, $R_4=10\ \Omega$, $R_5=5\ \Omega$, $I_1=10\text{ A}$, $I_2=5\text{ A}$.



Rys. 4.7



Rys. 4.8



Rys. 4.9

Zadanie 4.11

W obwodzie przedstawionym na rys. 4.10 obliczyć prąd I korzystając z twierdzenia Thevenina.

Dane: $U_1=2\text{ V}$, $U_2=1\text{ V}$, $R_1=2\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$, $R_3=4\ \Omega$, $R_4=3\ \Omega$.

Zadanie 4.12

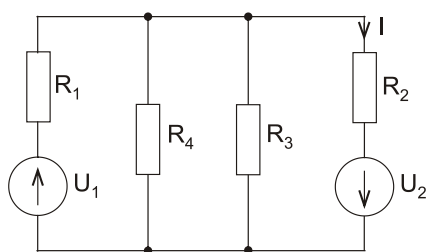
W obwodzie jak na rys. 4.11 obliczyć rozpyły prądów wykorzystując twierdzenie Thevenina oraz wykonać bilans mocy.

Dane: $U=100\text{ V}$, $R_1=15\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $R_3=5\ \Omega$, $R_4=25\ \Omega$, $R_5=8\ \Omega$.

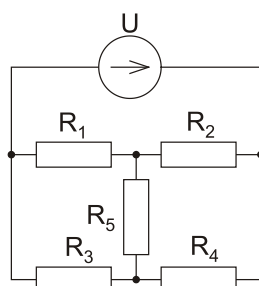
Zadanie 4.13

W układzie podanym na rys. 4.12 obliczyć wartość rezystancji R_5 , dla której prąd $I_4=0$. Dla tej wartości R_5 obliczyć rozpyły prądów oraz wykonać bilans mocy.

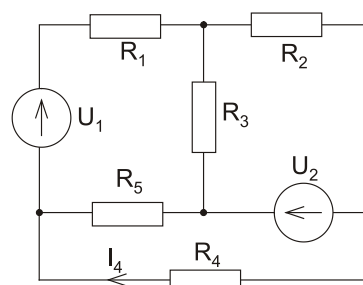
Dane: $U_1=400\text{ V}$, $U_2=200\text{ V}$, $R_1=72\ \Omega$, $R_2=80\ \Omega$, $R_3=120\ \Omega$, $R_4=100\ \Omega$.



Rys. 4.10



Rys. 4.11



Rys. 4.12

Zadanie 4.14

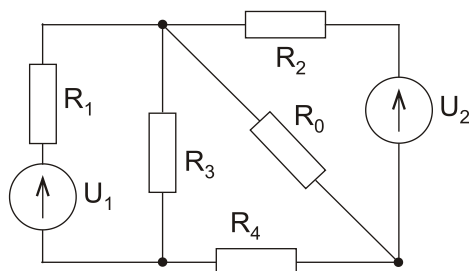
Korzystając z twierdzenia Thevenina w obwodzie przedstawionym na rys. 4.13 określić, dla jakiej wartości rezystancji R_3 prąd w rezystorze R_0 nie zależy od napięcia U_1 ; obliczyć jaka jest wówczas wartość tego prądu.

Dane: $U_2=250\text{ V}$, $R_0=50\ \Omega$, $R_1=75\ \Omega$, $R_2=12,5\ \Omega$, $R_4=150\ \Omega$.

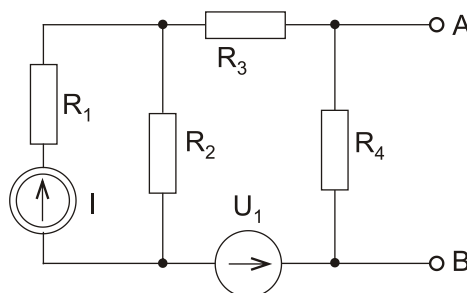
Zadanie 4.15

Dla obwodu przedstawionego na rys. 4.14 podać parametry schematu zastępczego U_T i R_T – między zaciskami A i B, korzystając z twierdzenia Thevenina.

Dane: $I=1\text{ A}$, $U_1=25\text{ V}$, $R_1=5\ \Omega$, $R_2=80\ \Omega$, $R_3=20\ \Omega$, $R_4=100\ \Omega$.



Rys. 4.13

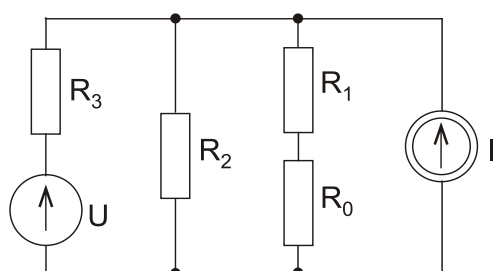


Rys. 4.14

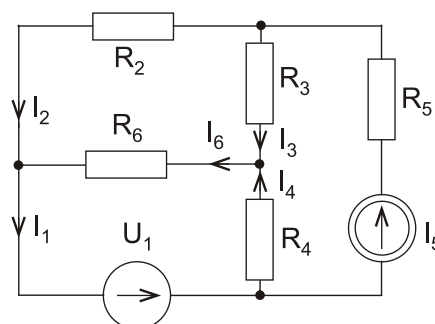
Zadanie 4.16

W obwodzie przedstawionym na rys. 4.15 dobrać rezystancję R_0 tak, aby wartość prądu płynącego przez ten rezystor wynosiła 10% wartości prądu źródła prądowego; wykorzystać twierdzenie Thevenina.

Dane: $I=2\text{ A}$, $U=60\text{ V}$, $R_1=20\ \Omega$, $R_2=90\ \Omega$, $R_3=30\ \Omega$, $R_4=100\ \Omega$.



Rys. 4.15

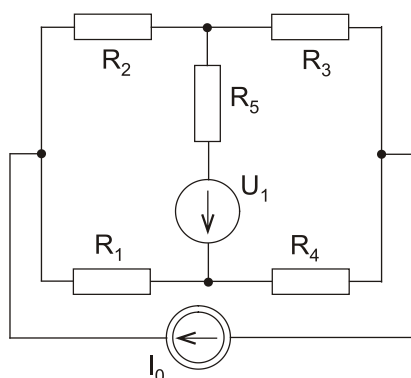


Rys. 4.16

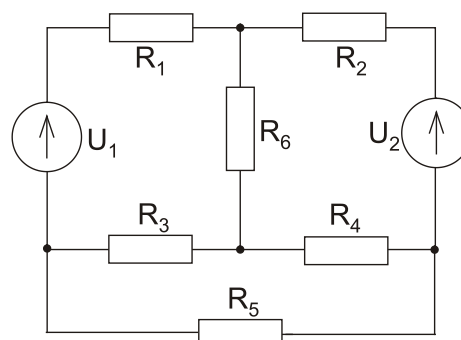
Zadanie 4.18

W obwodzie przedstawionym na rys. 4.17 w gałęzi ze źródłem napięciowym U_1 płynie prąd o wartości 2A. Korzystając z twierdzenia Thevenina obliczyć prąd źródła prądowego I_0 .

Dane: $U_1=10\text{ V}$, $R_1=R_3=6\ \Omega$, $R_2=R_4=4\ \Omega$, $R_5=5\ \Omega$.



Rys. 4.17



Rys. 4.18

Zadanie 4.19

W obwodzie przedstawionym na rys. 4.18 obliczyć wartość rezystancji R_6 , tak aby wydzielila się w niej maksymalna moc. Obliczyć tę moc.

Dane: $U_1=8\text{ V}$, $U_2=20\text{ V}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $R_3=3\ \Omega$, $R_4=4\ \Omega$, $R_5=5\ \Omega$.

Zadanie 4.20

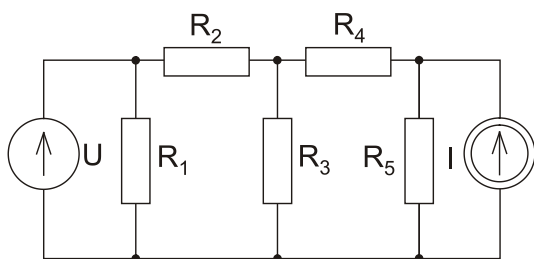
W obwodzie przedstawionym na rys. 4.19 obliczyć wartość rezystancji R_3 , tak aby moc P wydzielana w tej rezystancji była największa. Obliczyć tę moc.

Dane: $U=100\text{ V}$, $I=2\text{ A}$, $R_1=20\ \Omega$, $R_2=50\ \Omega$, $R_4=30\ \Omega$, $R_5=15\ \Omega$.

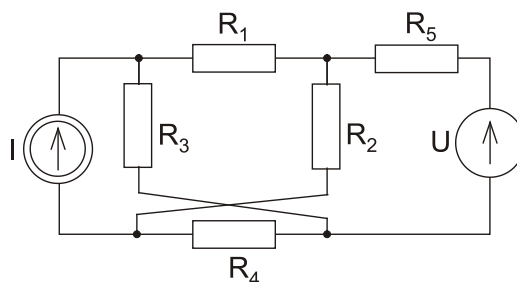
Zadanie 4.21

W przedstawionym na rys. 4.20 układzie obliczyć rezystancję R_5 tak aby wydzieliła się w niej maksymalna moc. Obliczyć tę moc.

Dane: $U=20\text{ V}$, $I=2\text{ A}$, $R_1=100\ \Omega$, $R_2=25\ \Omega$, $R_3=200\ \Omega$, $R_4=300\ \Omega$.



Rys. 4.19



Rys. 4.20

Zadanie 4.22

W obwodzie jak na rys. 4.21 obliczyć R_5 tak aby wydzieliła się w niej maksymalna moc. Obliczyć tę moc.

Dane: $I=1\text{ A}$, $U=10\text{ V}$, $R_1=10\ \Omega$, $R_2=50\ \Omega$, $R_3=40\ \Omega$, $R_4=20\ \Omega$.

Zadanie 4.23

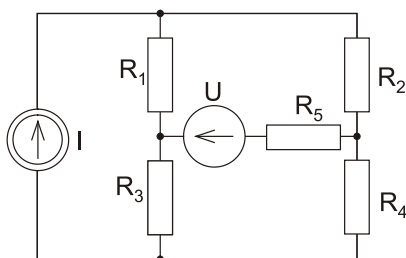
Dobrać rezystancję R_5 , aby moc w niej wydzielona była maksymalna. Obliczyć tę moc. Schemat układu przedstawiono na rys. 4.22.

Dane: $U=100\text{ V}$, $I=0,5\text{ A}$, $R_0=10\ \Omega$, $R_1=50\ \Omega$, $R_2=100\ \Omega$, $R_3=40\ \Omega$, $R_4=20\ \Omega$.

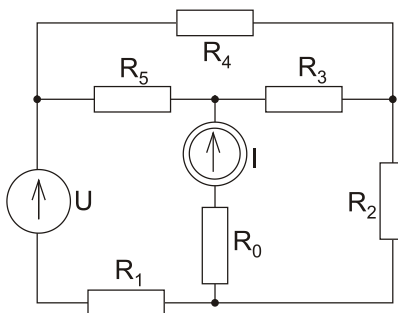
Zadanie 4.24

W obwodzie przedstawionym na rys. 4.23 obliczyć wartość rezystancji R_5 , tak aby moc wydzielana w tej rezystancji była największa. Obliczyć wartość tej mocy.

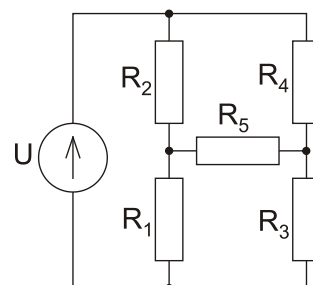
Dane: $U=20\text{ V}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=4\ \Omega$, $R_3=2\ \Omega$, $R_4=5\ \Omega$.



Rys. 4.21



Rys. 4.22



Rys. 4.23

Zadanie 4.25

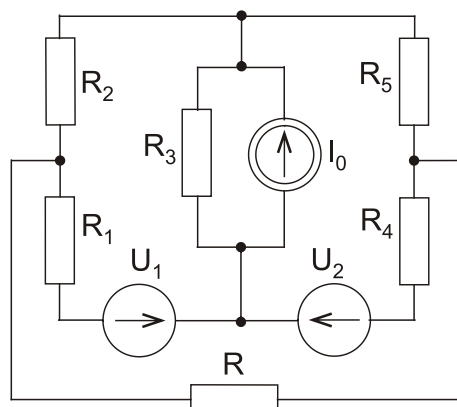
W obwodzie przedstawionym na rys. 4.24 dobrać wartość rezystancji R odbiornika tak, aby moc tego odbiornika była maksymalna. Obliczyć tę moc.

Dane: $I_0=2\text{ A}$, $U_1=6\text{ V}$, $U_2=2\text{ V}$, $R_1=R_2=R_3=6\ \Omega$, $R_4=R_5=2\ \Omega$.

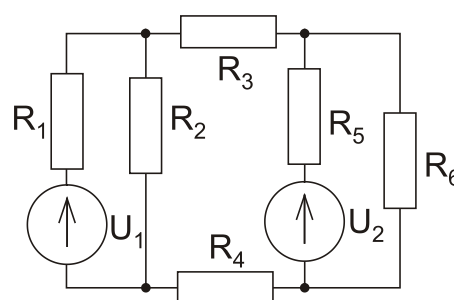
Zadanie 4.26

W układzie podanym na rys. 4.25 obliczyć wartość rezystancji R_6 , dla której moc w niej wydzielona jest maksymalna. Obliczyć wartość tej mocy.

Dane: $U_1=96\text{ V}$, $U_2=92\text{ V}$, $R_1=2\ \Omega$, $R_2=25\ \Omega$, $R_3=2\ \Omega$, $R_4=1\ \Omega$, $R_5=2\ \Omega$.



Rys. 4.24



Rys. 4.25

Zadanie 4.27

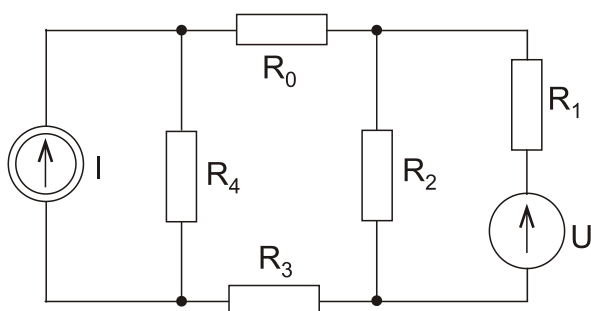
Korzystając z twierdzenia Thevenina obliczyć wartość napięcia U , przy której moc wydzielana w rezystancji R_0 jest równa zero w obwodzie przedstawionym na rys. 4.26.

Dane: $I=2,5\text{ A}$, $R_0=5\ \Omega$, $R_1=25\ \Omega$, $R_2=50\ \Omega$, $R_3=15\ \Omega$, $R_4=20\ \Omega$.

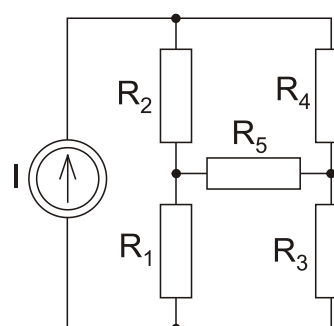
Zadanie 4.28

W obwodzie przedstawionym na rys. 4.27 dobrać wartość źródła prądu I tak, aby moc wydzielająca się w rezystancji R_5 była równa 4 W .

Dane: $R_1=2\ \Omega$, $R_2=8\ \Omega$, $R_3=8\ \Omega$, $R_4=7\ \Omega$, $R_5=4\ \Omega$.



Rys. 4.26



Rys. 4.27

Zadanie 4.29

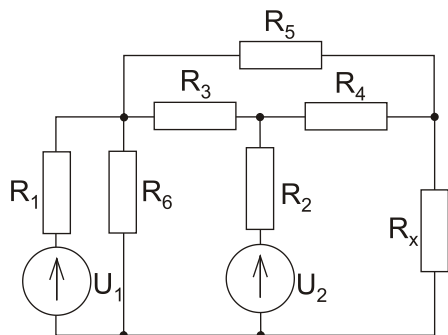
Obliczyć rezystancję R_x , dla której moc w niej wydzielona jest równa P_R . Schemat układu przedstawiono na rys. 4.28.

Dane: $U_1=120\text{ V}$, $U_2=120\text{ V}$, $R_1=8\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $R_3=6\ \Omega$, $R_4=9\ \Omega$, $R_5=10\ \Omega$, $R_6=90\ \Omega$, $P_R=200\text{ W}$.

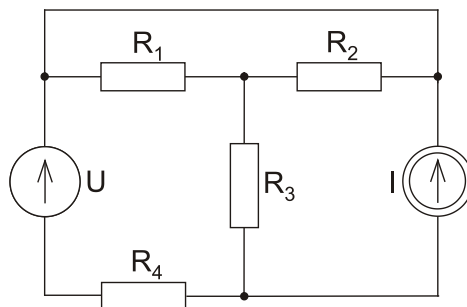
Zadanie 4.30

W obwodzie podanym na rys. 4.29 wyznaczyć i narysować wykres funkcji określającej zależność mocy wydzielającej się w rezystancji R_3 od prądu źródła prądowego I .

Dane: $U=50\text{ V}$, $R_1=8\ \Omega$, $R_2=12\ \Omega$, $R_3=10\ \Omega$, $R_4=5,2\ \Omega$.



Rys. 4.28



Rys. 4.29

II. OBWODY LINIOWE PRĄDU SINUSOIDALNEGO

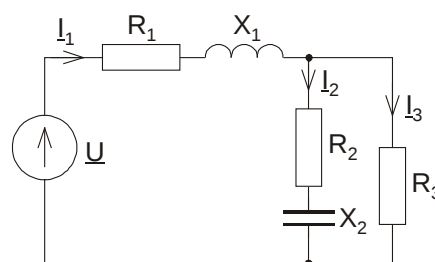
5. OBWODY ROZGAŁĘZIONE

PRAWO OHMA I PRAWA KIRCHHOFFA W POSTACI ZESPOLONEJ

Zadanie 5.1

W przedstawionym na rys. 5.1 układzie obliczyć prądy I_1 , I_2 , I_3 i wykonać bilans mocy.

Dane: $\underline{U}=220\text{ V}$, $R_1=55\ \Omega$, $R_2=39\ \Omega$,
 $R_3=71\ \Omega$, $X_1=92\ \Omega$, $X_2=54\ \Omega$.

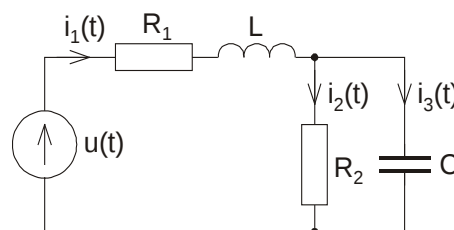


Rys. 5.1

Zadanie 5.2

W przedstawionym na rys. 5.2 układzie wyznaczyć prądy w gałęziach jako funkcje czasu, wykonać bilans mocy.

Dane: $u(t)=141\sin(314t+\pi/6)\text{ V}$, $R_1=10\ \Omega$, $R_2=20\ \Omega$,
 $L=15\text{ mH}$, $C=10\ \mu\text{F}$.



Rys. 5.2

Zadanie 5.3

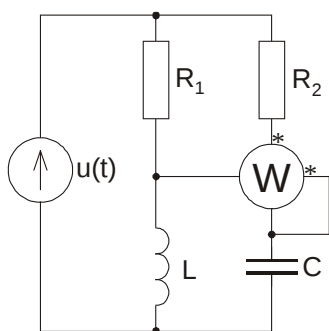
W przedstawionym na rys. 5.3 układzie obliczyć wskazanie watomierza, wykonać bilans mocy oraz narysować wykres fazorowy.

Dane: $u(t)=380\sqrt{2}\sin(314t)\text{ V}$, $R_1=120\ \Omega$, $R_2=150\ \Omega$, $L=150\text{ mH}$, $C=20\ \mu\text{F}$.

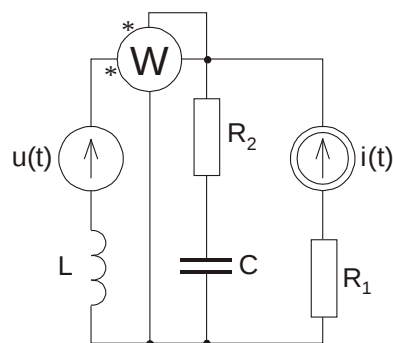
Zadanie 5.4

W przedstawionym na rys. 5.4 układzie obliczyć wskazanie watomierza i wykonać bilans mocy.

Dane: $u(t)=100\sin(314t+\pi/4)\text{ V}$, $i(t)=2\sin(314t)\text{ A}$,
 $R_1=50\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $L=100\text{ mH}$, $C=100\ \mu\text{F}$.



Rys. 5.3

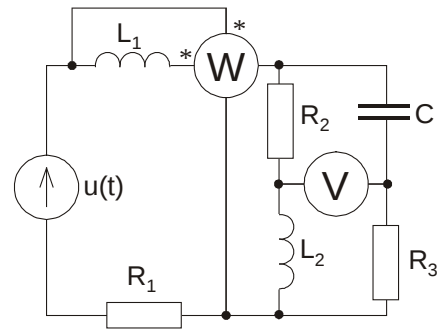


Rys. 5.4

Zadanie 5.5

W podanym układzie jak na rys. 5.5 obliczyć wskazanie watomierza oraz woltomierza. Wykonać bilans mocy.

Dane: $u(t) = 410\sqrt{2}\sin(200t)$ V, $R_1=20\ \Omega$, $R_2=30\ \Omega$, $R_3=25\ \Omega$, $L_1=100$ mH, $L_2=150$ mH, $C=200\ \mu$ F.



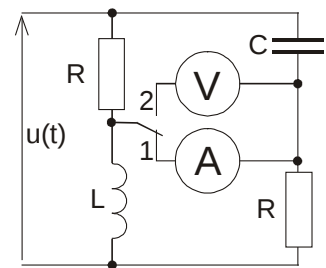
Rys. 5.5

Zadanie 5.6

W układzie, jak na rys. 5.6, obliczyć wskazanie amperomierza oraz woltomierza po zmianie pozycji łącznika z 1 na 2.

Dane: $u(t) = U\sqrt{2}\sin(314t - \pi/2)$, $U=230$ V, $R=2\omega L=1/\omega C$,

$$\frac{U}{R} = 5 \text{ A.}$$



Rys. 5.6

Zadanie 5.7

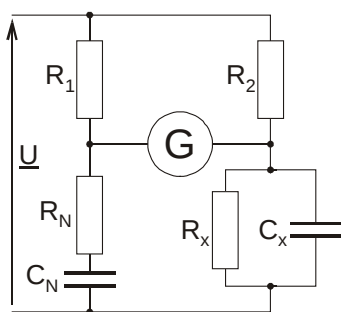
Określić warunki równowagi mostka Wiena, przedstawionego na rys. 5.7, i na tej podstawie określić R_x i C_x w funkcji pozostałych wielkości. Wykonać wykres fazorowy w stanie równowagi.

Zadanie 5.8

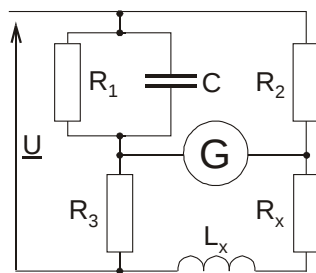
Określić warunki równowagi mostka Maxwella, przedstawionego na rys. 5.8, i na tej podstawie wyznaczyć R_x i L_x w funkcji pozostałych wielkości. Wykonać wykres fazorowy w stanie równowagi.

Zadanie 5.9

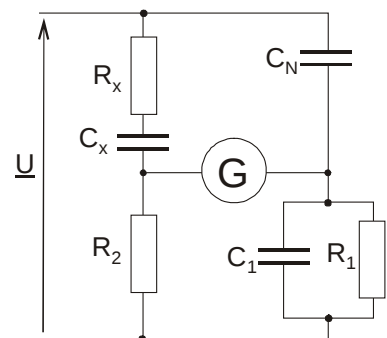
Określić warunki równowagi mostka Scheringa, przedstawionego na rys. 5.9, i na tej podstawie wyznaczyć R_x i C_x w funkcji pozostałych wielkości. Wykonać wykres fazorowy w stanie równowagi.



Rys. 5.7



Rys. 5.8

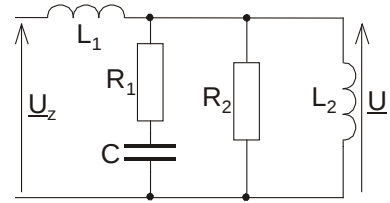


Rys. 5.9

Zadanie 5.10

W przedstawionym na rys. 5.10 obwodzie, zasilanym napięciem o częstotliwości $f=50$ Hz, jest dane napięcie na indukcyjności L_2 . Obliczyć napięcie zasilające $\underline{U}_z$ oraz sporządzić bilans mocy.

Dane: $L_1=6$ mH, $R_1=1 \Omega$, $C=44 \mu\text{F}$, $R_2=20 \Omega$, $L_2=100$ mH, $U=115$ V.

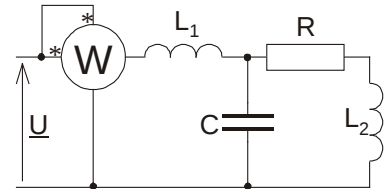


Rys. 5.10

Zadanie 5.11

Włączony do pokazanego na rys. 5.11 obwodu watomierz wskazuje moc $P=681$ W. Obliczyć napięcie zasilające U . Jaką wartość będzie miała moc P dla $U=220$ V? Częstotliwość napięcia zasilającego wynosi $f=50$ Hz.

Dane: $L_1=10$ mH, $C=50 \mu\text{F}$, $R=10 \Omega$, $L_2=30$ mH.

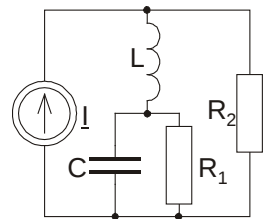


Rys. 5.11

METODA PODOBIENSTWA**Zadanie 5.12**

W przedstawionym na rys. 5.12 obwodzie, zasilanym prądem o częstotliwości $f=60$ Hz, obliczyć rozpyły prądów dla wartości zespolonych oraz sporządzić bilans mocy.

Dane: $I=10$ A, $L=70$ mH, $C=100 \mu\text{F}$, $R_1=25 \Omega$, $R_2=50 \Omega$.

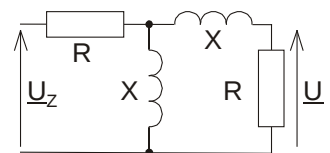


Rys. 5.12

Zadanie 5.13

Dla obwodu przedstawionego na rys. 5.13 obliczyć stosunek napięć U/U_z oraz narysować wykres fazorowy prądów i napięć.

Dane: $R=X$.

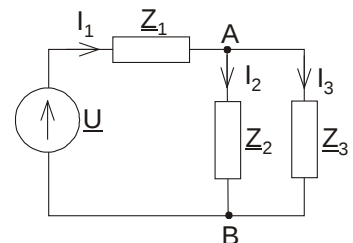


Rys. 5.13

Zadanie 5.14

W przedstawionym na rys. 5.14 układzie obliczyć wartości zespolone i skuteczne napięcia źródła $\underline{U}$, prądów w gałęziach oraz napięcia pomiędzy punktami A i B znając moc czynną P_Z oddawaną przez źródło zasilania.

Dane: $\underline{Z}_1=2+j36 \Omega$, $\underline{Z}_2=75 \Omega$, $\underline{Z}_3=-j100 \Omega$, $P_Z=31,25$ kW, $f=50$ Hz.

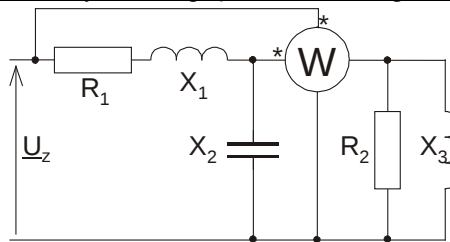


Rys. 5.14

Zadanie 5.15

W przedstawionym na rys. 5.15 obwodzie jest dane wskazanie watomierza. Obliczyć wartości skuteczne prądów i napięcia zasilającego oraz moc czynną pobieraną ze źródła.

Dane: $R_1=1 \Omega$, $X_1=2 \Omega$, $X_2=30 \Omega$, $R_2=12 \Omega$, $X_3=18 \Omega$, $P_w=195$ W.

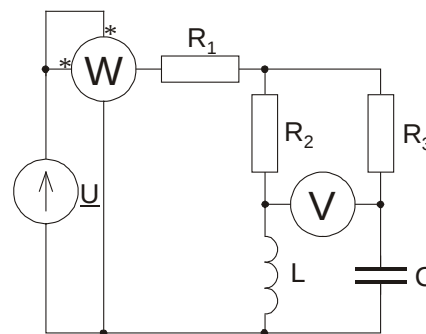


Rys. 5.15

Zadanie 5.16

W przedstawionym na rys. 5.16 układzie obliczyć napięcie zasilania $\underline{U}$ i wskazania przyrządów pomiarowych, jeżeli jest dana moc wydzielająca się w rezystancji R_1 . Wykonać bilans mocy pozornej oraz narysować wykres fazorowy.

Dane: $R_1=5\ \Omega$, $R_2=15\ \Omega$, $R_3=20\ \Omega$, $C=212\ \mu\text{F}$, $L=63,7\ \text{mH}$, $f=50\ \text{Hz}$, $P_{R1}=60\ \text{W}$.

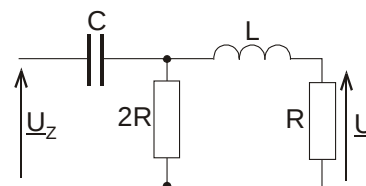


Rys. 5.16

Zadanie 5.17

W układzie, jak na rys. 5.17, dobrać indukcyjność L , tak aby napięcie $\underline{U}$ było w fazie z napięciem $\underline{U}_Z$. Narysować wykres fazorowy dla tego przypadku.

Dane: C , ω .

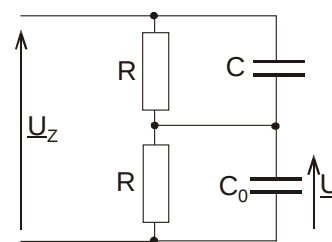


Rys. 5.17

Zadanie 5.18

W układzie, jak na rys. 5.18, obliczyć stosunek pojemności C_0/C , dla którego stosunek napięć $U/U_Z=1/3$. Narysować wykres fazorowy dla tego przypadku.

Dane: $\omega RC=1$

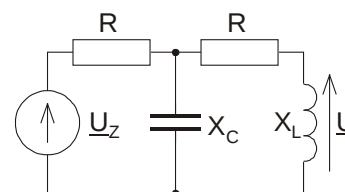


Rys. 5.18

Zadanie 5.19

W przedstawionym na rys. 5.19 układzie dobrać reaktancję X_C , tak aby napięcie $\underline{U}$ wyprzedzało napięcie źródła zasilania $\underline{U}_Z$ o kąt 45° . Narysować wykres fazorowy dla tego przypadku.

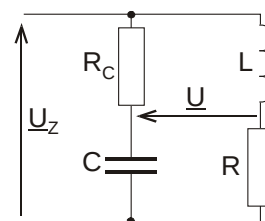
Dane: X_L , $R=4X_L$.



Rys. 5.19

Zadanie 5.20

W układzie, jak na rys. 5.20, obliczyć stosunek R/L , jeżeli $3R_C = 1/\omega C$ a kąt fazowy między fazorami napięć $\underline{U}$ i $\underline{U}_Z$ równy jest $\pi/6$ rad. Narysować wykres fazorowy dla tego przypadku.

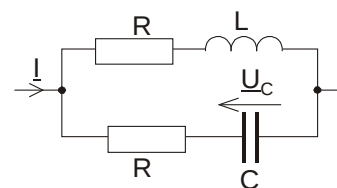


Rys. 5.20

Zadanie 5.21

Dla jakiej pulsacji ω w układzie, jak na rys. 5.21, prąd $\underline{I}$ będzie w fazie z napięciem $\underline{U}_C$. Narysować wykres fazorowy dla tego przypadku.

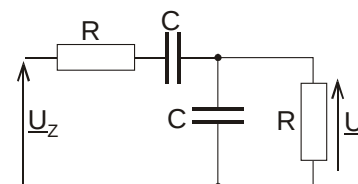
Dane: R, L, C .



Rys. 5.21

Zadanie 5.22

Dla obwodu przedstawionego na rys. 5.22 narysować przebieg funkcji $U/U_Z = f(\omega RC)$.

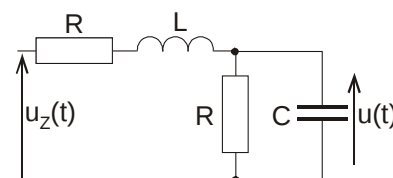


Rys. 5.22

Zadanie 5.23

Dla obwodu przedstawionego na rys. 5.23 obliczyć stosunek amplitud i przesunięcie fazowe między $u(t)$ a $u_Z(t)$. Narysować wykres fazorowy.

Dane: $u_Z(t) = U_{Zm} \cos \omega t$, $\omega RC = 2$, $\omega^2 LC = 1$.

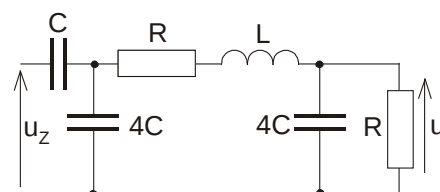


Rys. 5.23

Zadanie 5.24

W obwodzie przedstawionym na rys. 5.24 obliczyć kąt przesunięcia fazowego pomiędzy napięciami $u(t)$ i $u_Z(t)$ oraz stosunek wartości skutecznych tych napięć.

Dane: $\omega L/R = 5$, $\omega RC = 1$, $u_Z(t) = U_{Zm} \sin \omega t$.

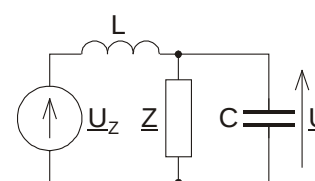


Rys. 5.24

Zadanie 5.25

W przedstawionym na rys. 5.25 układzie obliczyć impedancję $\underline{Z}$, dla której napięcia $\underline{U}$ i $\underline{U}_Z$ będą sobie równe.

Dane: ω, L, C .

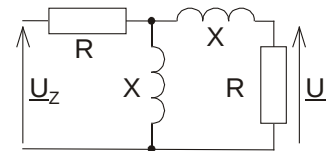


Rys. 5.25

Zadanie 5.26

Dla obwodu przedstawionego na rys. 5.26 obliczyć stosunek napięć U/U_Z oraz narysować wykres fazorowy prądów i napięć.

Dane: $R=X$.

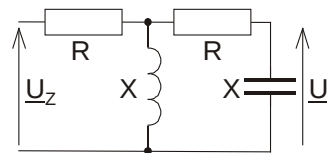


Rys. 5.26

Zadanie 5.27

Dla obwodu przedstawionego na rys. 5.27 obliczyć stosunek napięć U/U_Z , przesunięcie fazowe między napięciami $\underline{U}$ i $\underline{U}_Z$ oraz narysować wykres fazorowy prądów i napięć.

Dane: $R=X$.

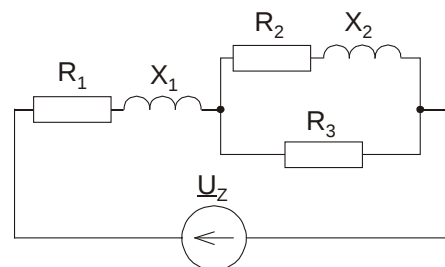


Rys. 5.27

Zadanie 5.28

W układzie Hummła przedstawionym na rys. 5.28 dobrać rezystancję R_3 , tak aby prąd płynący przez impedancję R_2+jX_2 wyprzedzał napięcie zasilania $\underline{U}_Z$ o kąt $\pi/2$ rad.

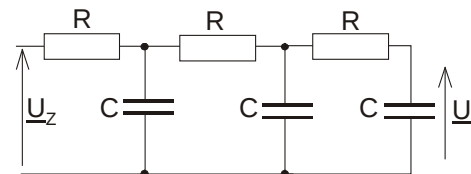
Dane: $R_1=10\ \Omega$, $R_2=20\ \Omega$, $X_1=22\ \Omega$, $X_2=50\ \Omega$.



Rys. 5.28

Zadanie 5.29

W danym na rys. 5.29 układzie drabinkowym wyznaczyć rezystancję R , dla której kąt przesunięcia fazowego między napięciami $\underline{U}$ i $\underline{U}_Z$ wynosi 180° .



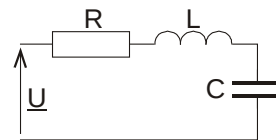
Rys. 5.29

6. REZONANS W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH

Zadanie 6.1

W szeregowym obwodzie rezonansowym RLC – rys. 6.1 – występuje rezonans przy danej częstotliwości f_r . Określić indukcyjność i pojemność obwodu, jeżeli jego dobroć wynosi Q .

Dane: $f_r=1500$ Hz, $Q=50$, $R=0,7\ \Omega$.

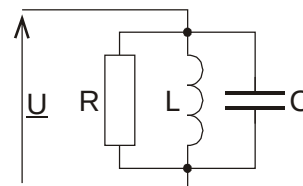


Rys. 6.1

Zadanie 6.2

Określić dane elementów równoległego obwodu rezonansowego RLC – rys. 6.2 o danej częstotliwości rezonansowej f_r i dobroci Q .

Dane: $f_r=300$ Hz, $Q=100$, $C=22\ \mu\text{F}$.

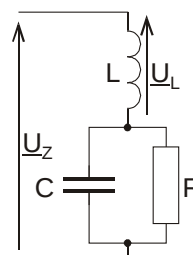


Rys. 6.2

Zadanie 6.3

Dla obwodu przedstawionego na rys. 6.3 obliczyć częstotliwość rezonansową f_r , impedancję obwodu w stanie rezonansu Z_r , dobroć Q , stosunek napięcia U_L na cewce do napięcia zasilającego oraz narysować wykres fazorowy prądów i napięć w stanie rezonansu. Określić przedział wartości rezystancji R , dla których w obwodzie zachodzi rezonans.

Dane: $L=23$ mH, $C=47\ \mu\text{F}$, $R=120\ \Omega$.

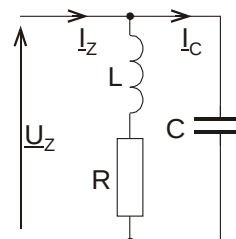


Rys. 6.3

Zadanie 6.4

Dla obwodu przedstawionego na rys. 6.4 obliczyć częstotliwość rezonansową f_r , impedancję obwodu w stanie rezonansu Z_r , dobroć Q , stosunek prądu I_C kondensatora do prądu I pobieranego ze źródła oraz narysować wykres fazorowy prądów i napięć w stanie rezonansu. Określić przedział wartości rezystancji R , dla których w obwodzie zachodzi rezonans.

Dane: $L=3,1$ mH, $C=10\ \mu\text{F}$, $R=1,5\ \Omega$.

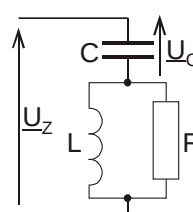


Rys. 6.4

Zadanie 6.5

Dla obwodu przedstawionego na rys. 6.5 obliczyć częstotliwość rezonansową f_r , impedancję obwodu w stanie rezonansu Z_r , dobroć Q , stosunek napięcia U_C na kondensatorze do napięcia zasilającego oraz narysować wykres fazorowy prądów i napięć w stanie rezonansu. Określić przedział wartości rezystancji R , dla których w obwodzie zachodzi rezonans.

Dane: $L=340$ mH, $C=22\ \mu\text{F}$, $R=500\ \Omega$.

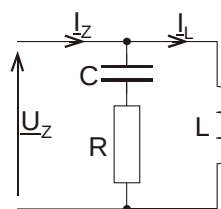


Rys. 6.5

Zadanie 6.6

Dla obwodu przedstawionego na rys. 6.6 obliczyć częstotliwość rezonansową f_r , impedancję obwodu w stanie rezonansu Z_r , dobroć Q , stosunek prądu I_L cewki do prądu I_Z pobieranego ze źródła oraz narysować wykres fazorowy prądów i napięć w stanie rezonansu. Określić przedział wartości rezystancji R , dla których w obwodzie zachodzi rezonans.

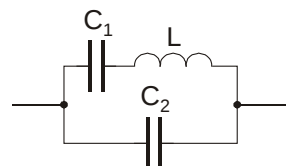
Dane: $L=124\text{ mH}$, $C=2\text{ }\mu\text{F}$ $R=100\text{ }\Omega$.



Rys. 6.6

Zadanie 6.7

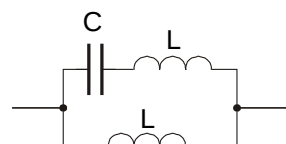
W układzie przedstawionym na rys. 6.7 obliczyć wszystkie pulsacje rezonansowe oraz naszkicować zależność $\text{Im}(\underline{Z})=f(\omega)$. Podać rodzaj rezonansu. Określić charakter obwodu w poszczególnych przedziałach ω .



Rys. 6.7

Zadanie 6.8

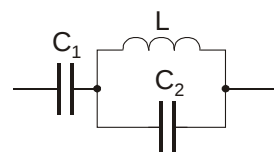
W przedstawionym na rys. 6.8 układzie obliczyć wszystkie pulsacje rezonansowe – podać rodzaj rezonansu. Naszkicować zależność $Z=f(\omega)$ i określić charakter obwodu w poszczególnych przedziałach ω .



Rys. 6.8

Zadanie 6.9

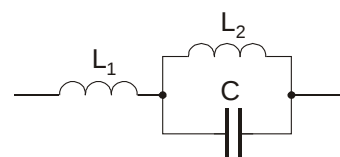
W przedstawionym na rys. 6.9 układzie obliczyć wszystkie pulsacje rezonansowe oraz naszkicować zależność $\text{Im}(\underline{Y})=f(\omega)$. Podać rodzaj rezonansu. Określić charakter obwodu w poszczególnych przedziałach ω .



Rys. 6.9

Zadanie 6.10

W układzie przedstawionym na rys. 6.10 obliczyć wszystkie pulsacje rezonansowe oraz naszkicować zależność $Y=f(\omega)$. Podać rodzaj rezonansu. Określić charakter obwodu w poszczególnych przedziałach ω .

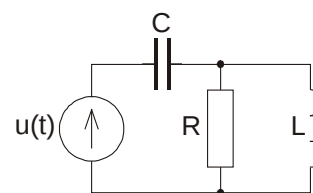


Rys. 6.10

Zadanie 6.11

Dla układu przedstawionego na rys. 6.11 wyznaczyć wartość pojemności C , tak aby moc bierna pobierana ze źródła była równa zero.

Dane: $u(t)=100\sqrt{2}\sin(1000t)\text{ V}$, $R=10\text{ }\Omega$, $L=5\text{ mH}$.

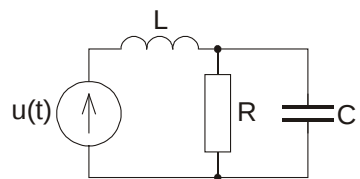


Rys. 6.11

Zadanie 6.12

Dla układu przedstawionego na rys. 6.12 wyznaczyć wartość pojemności C , tak aby moc czynna obwodu była maksymalna. Obliczyć wartość tej mocy.

Dane: $u(t) = 100\sqrt{2}\sin(1000t)$ V, $R = 10\ \Omega$, $L = 5$ mH.



Rys. 6.12

7. OBWODY JEDNOFAZOWE

Zadanie 7.1

W układzie przedstawionym na rys. 7.1 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu A obwodu wynosi $\cos\varphi_A=0,9$ oraz obliczyć wartość napięcia U_z , przy której odbiornik pracuje w warunkach znamionowych.

Dane: $f=50\text{ Hz}$, $X=1\ \Omega$.

Dane znamionowe - Odb: $P_n=1\text{ kW}$, $U_n=220\text{ V}$, $\cos\varphi_n=0,5$.

Zadanie 7.2

W układzie z rys. 7.1 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu B obwodu wynosi $\cos\varphi_B=1$.

Dane: $f=50\text{ Hz}$, $X=1\ \Omega$.

Dane znamionowe - Odb: $P_n=1\text{ kW}$, $U_n=220\text{ V}$, $\cos\varphi_n=0,5$.

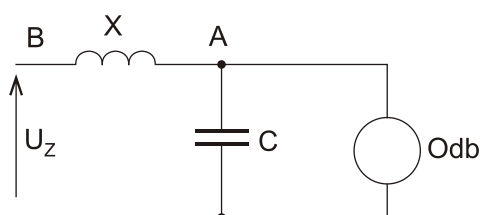
Zadanie 7.3

W układzie przedstawionym na rys. 7.2 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu A obwodu wynosi $\cos\varphi_A=0,94$ oraz obliczyć wartość napięcia U_z , przy której odbiornik pracuje w warunkach znamionowych.

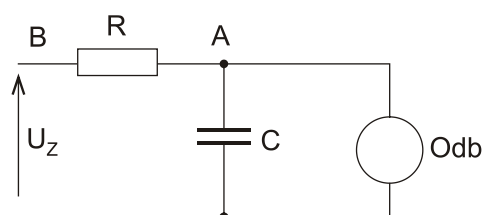
Dane: $f=50\text{ Hz}$, $R=0,8\ \Omega$.

Dane znamionowe:

Odb: $S_n=1,8\text{ kVA}$, $U_n=230\text{ V}$, $\cos\varphi_n=0,72$.



Rys. 7.1



Rys. 7.2

Zadanie 7.4

W układzie z rys. 7.2 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu B obwodu wynosi $\cos\varphi_B=0,96$.

Dane: $f=50\text{ Hz}$, $R=0,8\ \Omega$.

Dane znamionowe:

Odb: $S_n=1,8\text{ kVA}$, $U_n=230\text{ V}$, $\cos\varphi_n=0,72$.

Zadanie 7.5

W układzie przedstawionym na rys. 7.3 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu A obwodu wynosi $\cos\varphi_A=0,92$ oraz obliczyć wartość napięcia U_z , przy której odbiornik pracuje w warunkach znamionowych.

Dane: $f=50\text{ Hz}$, $R=0,6\ \Omega$, $X=1\ \Omega$.

Dane znamionowe - Odb: $P_n=2,4\text{ kW}$, $U_n=230\text{ V}$, $\cos\varphi_n=0,76$.

Zadanie 7.6

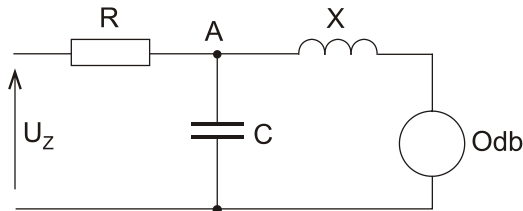
W układzie przedstawionym na rys. 7.4 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu A obwodu wynosi $\cos\varphi_A=0,9$. Obliczyć rzeczywiste moce czynne pobierane przez odbiorniki, jeżeli napięcie zasilania wynosi $U_z=200\text{ V}$.

Dane: $f=50$ Hz.

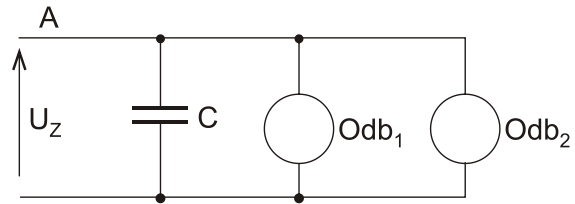
Dane znamionowe:

Odb₁: $U_{1n}=220$ V, $P_{1n}=1$ kW, $\cos\varphi_1=0,5$,

Odb₂: $U_{2n}=220$ V, $S_{2n}=2$ kV·A, $\cos\varphi_2=0,707$.



Rys. 7.3



Rys. 7.4

Zadanie 7.7

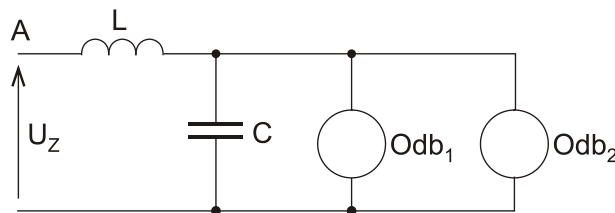
W układzie przedstawionym na rys. 7.5 obliczyć wypadkowy współczynnik mocy w miejscu A obwodu oraz rzeczywiste moce czynne pobierane przez odbiorniki, jeżeli napięcie zasilania wynosi $U_Z=215$ V.

Dane: $f=50$ Hz, $C=0,2$ mF, $L=2$ mH.

Dane znamionowe:

Odb₁: $U_{1n}=230$ V, $P_{1n}=0,8$ kW, $\cos\varphi_1=0,8$,

Odb₂: $U_{2n}=230$ V, $P_{2n}=2,2$ kW, $\cos\varphi_2=0,6$.



Rys. 7.5

Zadanie 7.8

W układzie przedstawionym na rys. 7.6 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu A obwodu wynosi $\cos\varphi_A=1$. Obliczyć, przy jakiej wartości U_Z napięcia zasilania odbiornik 1 pracuje w warunkach znamionowych, oraz jaka jest wówczas moc pobierana przez odbiornik 2.

Dane: $X=0,4$ Ω , $R=0,3$ Ω , $X_Z=0,5$ Ω , $f=50$ Hz.

Dane znamionowe:

Odb₁: $P_{1n}=30$ kW, $U_{1n}=660$ V, $\cos\varphi_1=0,78$,

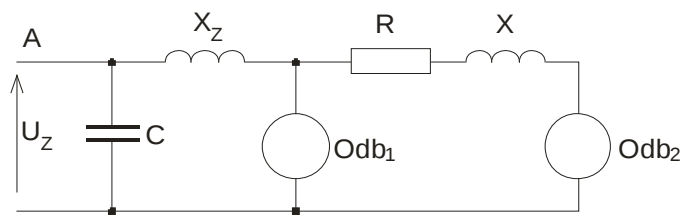
Odb₂: $P_{2n}=20$ kW, $U_{2n}=660$ V, $\cos\varphi_2=0,86$.

Zadanie 7.9

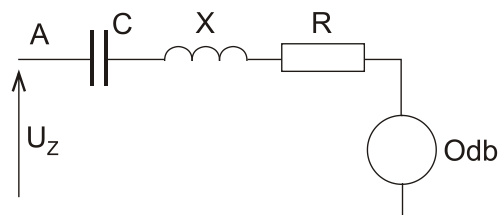
W układzie przedstawionym na rys. 7.7 obliczyć pojemność C (kompensacja szeregową), przy której współczynnik mocy w miejscu A obwodu wynosi $\cos\varphi_A=0,98$. Obliczyć, przy jakiej wartości U_Z napięcia zasilania odbiornik pracuje w warunkach znamionowych.

Dane: $X=0,8$ Ω , $R=0,6$ Ω , $f=50$ Hz.

Dane znamionowe - Odb: $P_n=10$ kW, $U_n=380$ V, $\cos\varphi=0,8$.



Rys. 7.6



Rys. 7.7

Zadanie 7.10

W układzie przedstawionym na rys. 7.7 obliczyć pojemność C , przy której wartość napięcia odbiornika jest równa wartości napięcia zasilającego U_z . Obliczyć, jaki jest wówczas współczynnik mocy obwodu $\cos\varphi_A$.

Dane: $X=1,2\ \Omega$, $R=0,4\ \Omega$, $f=50\ \text{Hz}$.

Dane znamionowe - Odb: $P_n=2,4\ \text{kW}$, $U_n=230\ \text{V}$, $\cos\varphi=0,72$.

Zadanie 7.11

W układzie przedstawionym na rys. 7.8 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu A obwodu wynosi $\cos\varphi_A=0,95$. Obliczyć rzeczywiste moce czynne pobierane przez odbiorniki, jeżeli napięcie zasilania wynosi $U_z=370\ \text{V}$.

Dane: $R=1\ \Omega$, $f=50\ \text{Hz}$.

Dane znamionowe:

Odb₁ : $U_{1n}=380\ \text{V}$, $P_{1n}=5\ \text{kW}$, $\cos\varphi_1=0,74$,

Odb₂ : $U_{2n}=380\ \text{V}$, $S_{2n}=8\ \text{kV}\cdot\text{A}$, $\cos\varphi_2=0,8$.

Zadanie 7.12

W układzie przedstawionym na rys. 7.8 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu A obwodu wynosi $\cos\varphi_A=0,9$. Obliczyć, przy jakiej wartości napięcia zasilania U_z odbiornik 1 pracuje w warunkach znamionowych.

Dane: $R=5\ \Omega$, $f=50\ \text{Hz}$.

Dane znamionowe:

Odb₁ : $S_{1n}=10\ \text{kV}\cdot\text{A}$, $U_{1n}=1\ \text{kV}$, $\cos\varphi_1=0,8$,

Odb₂ : $P_{2n}=10\ \text{kW}$, $U_{2n}=2\ \text{kV}$, $\cos\varphi_2=0,55$.

Zadanie 7.13

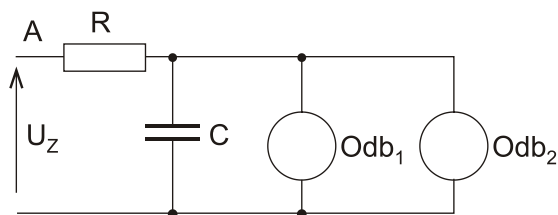
W układzie przedstawionym na rys. 7.9 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu A obwodu wynosi $\cos\varphi_A=0,85$. Obliczyć rzeczywiste moce czynne pobierane przez odbiorniki, jeżeli napięcie zasilania wynosi $U_z=400\ \text{V}$.

Dane: $X=10\ \Omega$, $f=50\ \text{Hz}$.

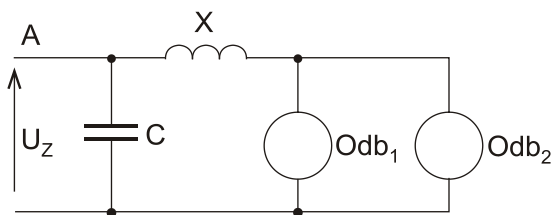
Dane znamionowe:

Odb₁ : $P_{1n}=1\ \text{kW}$, $U_{1n}=500\ \text{V}$, $\cos\varphi_1=0,8$,

Odb₂ : $P_{2n}=0,8\ \text{kW}$, $U_{2n}=500\ \text{V}$, $\cos\varphi_2=0,6$.



Rys. 7.8



Rys. 7.9

Zadanie 7.14

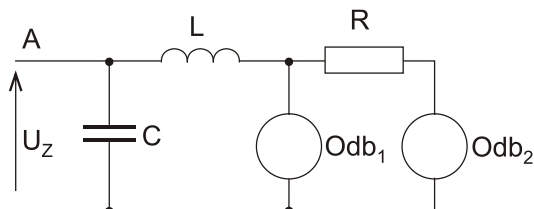
W układzie przedstawionym na rys. 7.10 obliczyć napięcie zasilania U_z , współczynnik mocy w miejscu A obwodu $\cos\varphi_A$, oraz rzeczywistą moc czynną pobieraną przez odbiornik 1, jeżeli odbiornik 2 pracuje w warunkach znamionowych.

Dane: $R=1,6\ \Omega$, $L=3\text{ mH}$, $C=56\ \mu\text{F}$, $f=50\text{ Hz}$.

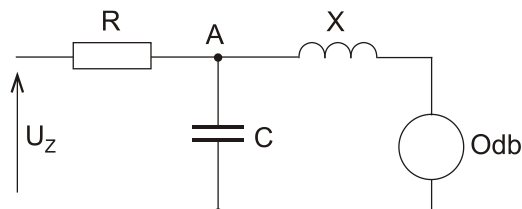
Dane znamionowe:

Odb₁: $P_{1n}=2\text{ kW}$, $U_{1n}=500\text{ V}$, $\cos\varphi_1=0,68$,

Odb₂: $P_{2n}=3,8\text{ kW}$, $U_{2n}=500\text{ V}$, $\cos\varphi_2=0,86$.



Rys. 7.10



Rys. 7.11

Zadanie 7.15

W układzie przedstawionym na rys. 7.11 odbiornik 2 pracuje w warunkach znamionowych. Obliczyć wartość napięcia zasilania U_z .

Dane: $R=10\ \Omega$, $X=5\ \Omega$.

Dane znamionowe:

Odb₁: $P_{1n}=1\text{ kW}$, $U_{1n}=220\text{ V}$, $\cos\varphi_1=0,707$,

Odb₂: $P_{2n}=1\text{ kW}$, $U_{2n}=220\text{ V}$, $\cos\varphi_2=0,707$.

Zadanie 7.16

W układzie jednofazowym przedstawionym na rys. 7.12 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy całego obwodu wynosi $\cos\varphi=1$. Obliczyć rzeczywiste moce czynne pobierane przez odbiorniki, jeżeli $U_z=15,3\text{ kV}$.

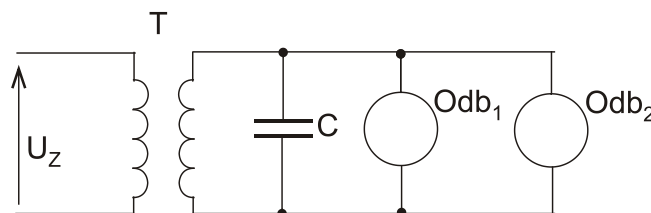
Dane: $f=50\text{ Hz}$.

Dane znamionowe:

T: $S_n=31,5\text{ kV}\cdot\text{A}$, $9=15/0,4\text{ kV/kV}$, $u_{z\%}=8\%$,

Odb₁: $P_{1n}=10\text{ kW}$, $U_{1n}=380\text{ V}$, $\cos\varphi_1=0,8$,

Odb₂: $S_{2n}=18\text{ kV}\cdot\text{A}$, $U_{2n}=380\text{ V}$, $\cos\varphi_2=0,76$.



Rys. 7.12

Zadanie 7.17

W układzie jednofazowym przedstawionym na rys. 7.12 obliczyć współczynnik mocy całego obwodu $\cos\varphi$. Obliczyć napięcie zasilania U_z i całkowitą moc czynną, bierną i pozorną obwodu, jeżeli odbiorniki pracują w warunkach znamionowych.

Dane: $f=50\text{ Hz}$.

Dane znamionowe:

C: $Q_n=8\text{ kvar}$, $U_n=400\text{ V}$,

T: $S_n=16 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $\vartheta=6/0,4 \text{ kV/kV}$, $u_{z\%}=7 \%$,
 Odb₁: $P_{1n}=5 \text{ kW}$, $U_{1n}=400 \text{ V}$, $\cos\varphi_1=0,78$,
 Odb₂: $S_{2n}=9 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $U_{2n}=400 \text{ V}$, $\cos\varphi_2=0,84$.

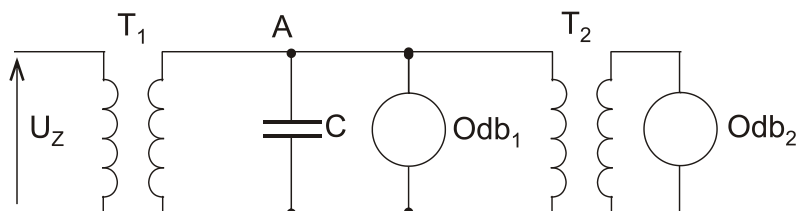
Zadanie 7.18

W układzie jednofazowym przedstawionym na rys. 7.13 obliczyć pojemność C , przy której współczynnik mocy w miejscu A obwodu wynosi $\cos\varphi_A=0,96$. Obliczyć rzeczywistą moc czynną pobieraną przez odbiornik 1 oraz wartość napięcia zasilania U_z przy założeniu, że odbiornik 2 pracuje w warunkach znamionowych.

Dane: $f=50 \text{ Hz}$.

Dane znamionowe:

T_1 : $S_{T1n}=63 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_1=60/15 \text{ kV/kV}$, $u_{z1\%}=6 \%$,
 T_2 : $S_{T2n}=31,5 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_2=15/0,4 \text{ kV/kV}$, $u_{z2\%}=8 \%$,
 Odb₁: $S_{1n}=30 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $U_{1n}=15 \text{ kV}$, $\cos\varphi_1=0,82$,
 Odb₂: $P_{2n}=20 \text{ kW}$, $U_{2n}=380 \text{ V}$, $\cos\varphi_2=0,7$.



Rys. 7.13

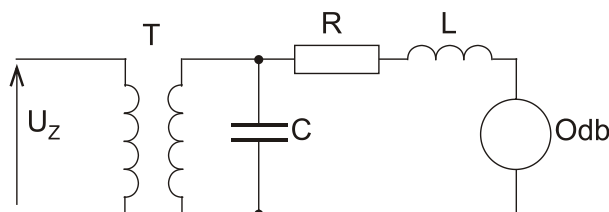
Zadanie 7.19

W układzie jednofazowym przedstawionym na rys. 7.14 obliczyć rzeczywistą moc czynną pobieraną przez odbiornik oraz całkowitą moc czynną, bierną i pozorną pobierane przez układ, jeżeli $U_z=31 \text{ kV}$.

Dane: $f=50 \text{ Hz}$, $L=0,5 \text{ mH}$, $C=20 \mu\text{F}$, $R=0,1 \Omega$.

Dane znamionowe:

T: $S_n=150 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $\vartheta=30/3 \text{ kV/kV}$, $u_{z\%}=7\%$,
 Odb: $U_n=3 \text{ kV}$, $P_n=100 \text{ kW}$, $\cos\varphi=0,8$.



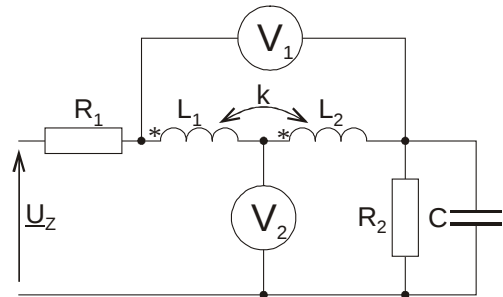
Rys. 7.14

8. OBWODY ZE SPRZĘŻENIAMI MAGNETYCZNYMI

Zadanie 8.1

W przedstawionym na rys. 8.1 obwodzie obliczyć rozpyły prądów, wskazania woltomierzy i sporządzić bilans mocy.

Dane: $\underline{U}_Z=100\text{ V}$, $R_1=10\ \Omega$, $L_1=20\text{ mH}$,
 $L_2=5\text{ mH}$, $R_2=20\ \Omega$, $C=125\ \mu\text{F}$,
 $k=0,75$, $\omega=400\text{ s}^{-1}$.

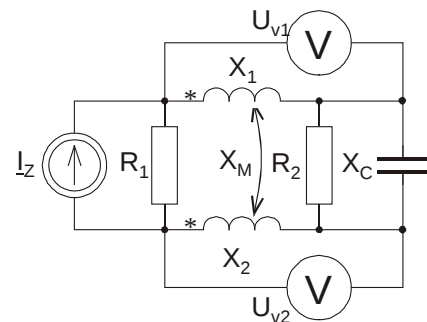


Rys. 8.1

Zadanie 8.2

W przedstawionym na rys. 8.2 obwodzie obliczyć rozpyły prądów, wskazania woltomierzy i sporządzić bilans mocy.

Dane: $\underline{I}_Z=10\text{ A}$, $R_1=15\ \Omega$, $X_1=15\ \Omega$,
 $X_2=20\ \Omega$, $X_M=5\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$,
 $X_C=10\ \Omega$,

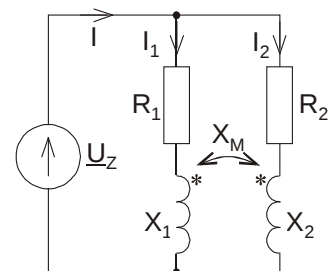


Rys. 8.2

Zadanie 8.3

W przedstawionym na rys. 8.3 obwodzie obliczyć wszystkie prądy i wykonać bilans mocy. Te same obliczenia wykonać dla przypadku, gdy końce jednej z cewek zostaną zamienione, oraz w sytuacji, gdy nie ma sprzężenia magnetycznego między cewkami.

Dane: $\underline{U}_Z=100\text{ V}$, $R_1=X_1=10\ \Omega$, $R_2=X_2=X_M=5\ \Omega$.

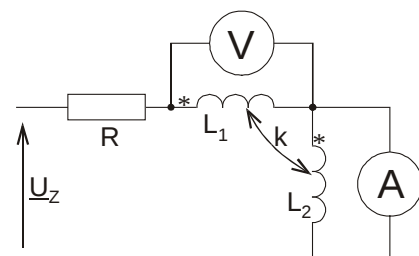


Rys. 8.3

Zadanie 8.4

W danym na rys. 8.4 obwodzie obliczyć wskazania przyrządów pomiarowych.

Dane: $R=10\ \Omega$, $L_1=100\text{ mH}$, $L_2=140\text{ mH}$,
 $k=0,8$, $\underline{U}_Z=120\text{ V}$, $f=50\text{ Hz}$.

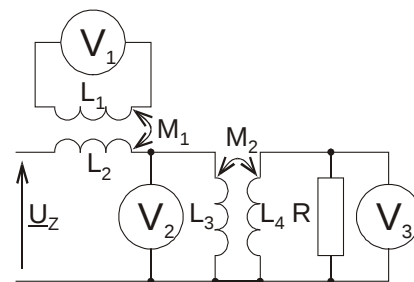


Rys. 8.4

Zadanie 8.5

W obwodzie przedstawionym na rys. 8.5 Obliczyć wskazania woltomierzy

Dane: $L_1=30 \text{ mH}$, $L_2=6 \text{ mH}$, $L_3=9 \text{ mH}$,
 $L_4=20 \text{ mH}$, $M_1=12 \text{ mH}$, $M_2=12 \text{ mH}$,
 $R=30 \Omega$, $\underline{U}_Z=66 \text{ V}$, $\omega=314 \text{ s}^{-1}$.

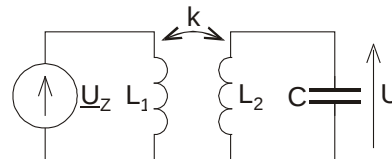


Rys. 8.5

Zadanie 8.6

W przedstawionym na rys. 8.6 obwodzie obliczyć napięcie $U=U(k)$.

Dane: $\underline{U}_Z$, $\omega L_1 = \omega L_2 = \frac{1}{2\omega C} = X$.

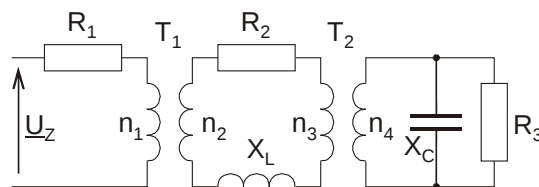


Rys. 8.6

Zadanie 8.7

Obwód przedstawiony na rys. 8.7 zawiera dwa transformatory idealne. Obliczyć rozpyły prądów, sporządzić bilans mocy.

Dane: $R_1=4,5 \Omega$, $R_2=4,5 \Omega$, $R_3=4,5 \Omega$,
 $X_L=18 \Omega$, $X_C=18 \Omega$, $\underline{U}_Z=36 \text{ V}$.
 $n_1=330$ zwojów, $n_2=700$ zwojów,
 $n_3=660$ zwojów, $n_4=200$ zwojów,

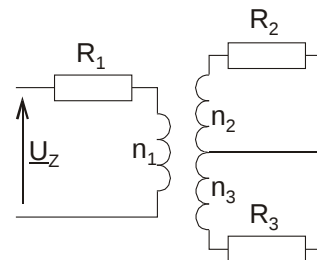


Rys. 8.7

Zadanie 8.8

W obwód przedstawiony na rys. 8.8 włączono transformator idealny z uzwojeniem wtórnym dzielonym. Obliczyć rozpyły prądów i sporządzić bilans mocy.

Dane: $\underline{U}_Z=24 \text{ V}$, $R_1=30 \Omega$, $R_2=5 \Omega$, $R_3=3,2 \Omega$,
 $n_1=300$ zwojów, $n_2=125$ zwojów, $n_3=100$ zwojów.

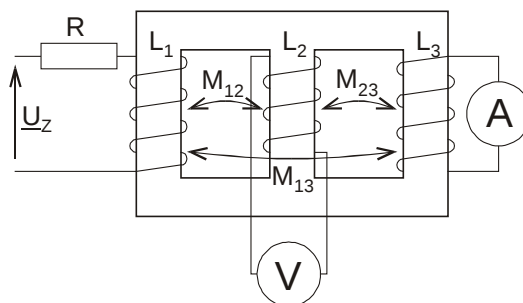


Rys. 8.8

Zadanie 8.9

Rys. 8.9 przedstawia obwód magnetyczny z trzema uzwojeniami wzajemnie sprzężonymi. Należy obliczyć wskazania przyrządów pomiarowych.

Dane: $R=2,5 \Omega$, $L_1=30 \text{ mH}$, $L_2=40 \text{ mH}$,
 $L_3=20 \text{ mH}$, $M_{12}=16 \text{ mH}$, $M_{23}=6 \text{ mH}$,
 $M_{31}=18 \text{ mH}$, $\underline{U}_Z=15 \text{ V}$, $f=50 \text{ Hz}$.

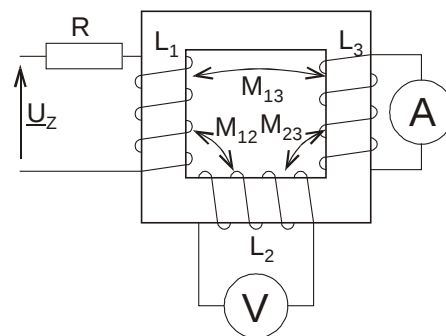


Rys. 8.9

Zadanie 8.10

Trzy uzwojenia umieszczono na wspólnym magnetowodzie, jak pokazuje rys. 8.10. Należy obliczyć wskazania przyrządów pomiarowych.

Dane: $R=2\ \Omega$, $L_1=20\text{ mH}$, $L_2=22\text{ mH}$
 $L_3=20\text{ mH}$, $M_{12}=19\text{ mH}$, $M_{23}=20\text{ mH}$
 $M_{31}=18\text{ mH}$, $\underline{U}_Z=25\text{ V}$, $f=50\text{ Hz}$.

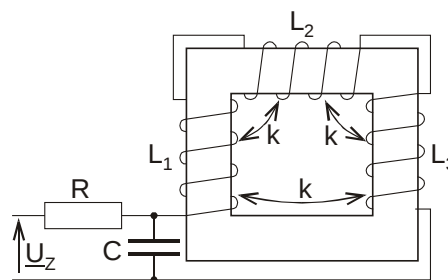


Rys. 8.10

Zadanie 8.11

W przedstawionym na rys. 8.11 obwodzie obliczyć rozptyw prądów i sporządzić bilans mocy.

Dane: $R=60\ \Omega$, $C=100\ \mu\text{F}$, $L_1=100\text{ mH}$, $L_2=200\text{ mH}$,
 $L_3=300\text{ mH}$, $k=0,9$, $\omega=314$, $\underline{U}_Z=127\text{ V}$.

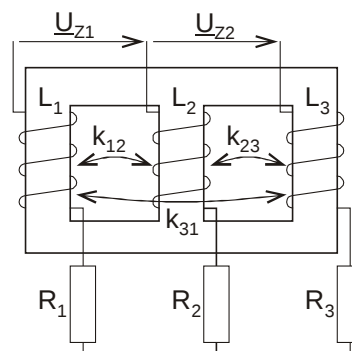


Rys. 8.11

Zadanie 8.12

W przedstawionym na rys. 8.12 obwodzie obliczyć rozptyw prądów i sporządzić bilans mocy.

Dane: $\underline{U}_{Z1}=110\text{ V}$, $\underline{U}_{Z2}=j110\text{ V}$, $L_1=180\text{ mH}$, $L_2=220\text{ mH}$, $L_3=180\text{ mH}$,
 $k_{12}=0,92$, $k_{23}=0,92$, $k_{31}=0,9$, $R_1=50\ \Omega$, $R_2=40\ \Omega$,
 $R_3=60\ \Omega$, $f=50\text{ Hz}$



Rys. 8.12

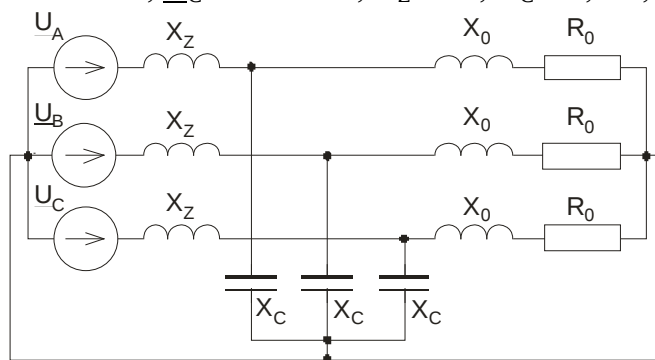
9. OBWODY TRÓJFAZOWE SYMETRYCZNE

SCHEMATY ROZWIĘTE OBWODÓW TRÓJFAZOWYCH

Zadanie 9.1

Przedstawiony na rys. 9.1 obwód zawiera trójfazowe źródło z reaktancją wewnętrzną X_Z , baterię kondensatorów i odbiornik o charakterze indukcyjnym. Wszystkie elementy układu są połączone w gwiazdę. Obliczyć moc czynną odbiornika, moc baterii i moc pozorną źródła.

Dane: $\underline{U}_A=230\text{ V}$, $\underline{U}_B=230e^{-j120^\circ}\text{ V}$, $\underline{U}_C=230e^{j120^\circ}\text{ V}$, $X_Z=4\ \Omega$, $X_C=14,5\ \Omega$, $R_0=6\ \Omega$, $X_0=12\ \Omega$,

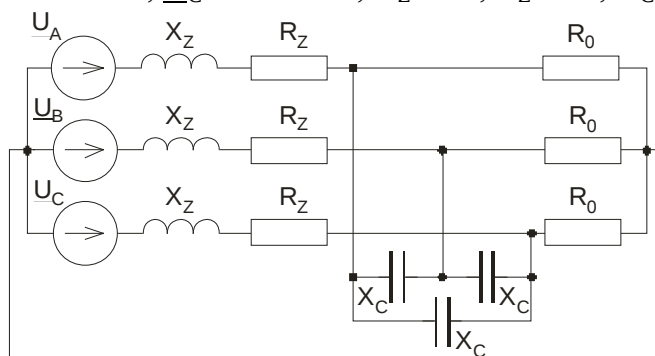


Rys. 9.1

Zadanie 9.2

Do zacisków odbiornika rezystancyjnego dołączono baterię kondensatorów połączoną w trójkąt - rys. 9.2. Układ jest zasilany ze źródła w układzie gwiazdy poprzez linię zasilającą o rezystancji R_Z i reaktancji X_Z . Obliczyć prąd zasilający odbiornika, prąd w linii zasilającej baterię kondensatorów oraz prąd źródła. Obliczyć napięcie fazowe baterii kondensatorów.

Dane: $\underline{U}_A=230\text{ V}$, $\underline{U}_B=230e^{-j120^\circ}\text{ V}$, $\underline{U}_C=230e^{j120^\circ}\text{ V}$, $X_Z=3\ \Omega$, $R_Z=2\ \Omega$, $X_C=90\ \Omega$, $R_0=18\ \Omega$.



Rys. 9.2

Zadanie 9.3

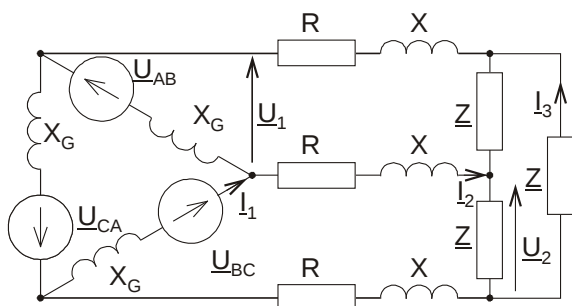
Przedstawiony na rys. 9.3 układ zawiera źródło z impedancją wewnętrzną, połączone w trójkąt i zasilany przez linię o impedancji $R+jX$ odbiornik o impedancji fazowej $\underline{Z}$, połączony w trójkąt. Obliczyć wartości zespolone prądów $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ oraz napięć $\underline{U}_1$ i $\underline{U}_2$.

Dane: $X_G=3,3\ \Omega$, $R=0,3\ \Omega$, $X=0,7\ \Omega$, $\underline{Z}=18e^{j39^\circ}\ \Omega$,
 $\underline{U}_{AB}=440\text{ V}$, $\underline{U}_{BC}=440e^{-j120^\circ}\text{ V}$, $\underline{U}_{CA}=440e^{j120^\circ}\text{ V}$

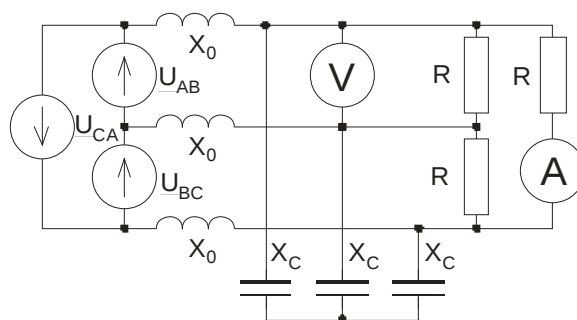
Zadanie 9.4

W układzie przedstawionym na rys. 9.4 obliczyć wskazania przyrządów pomiarowych.

Dane: $X_0=6\ \Omega$, $X_C=10\ \Omega$, $R=150\ \Omega$, napięcie fazowe źródła $U=400\text{ V}$.



Rys. 9.3

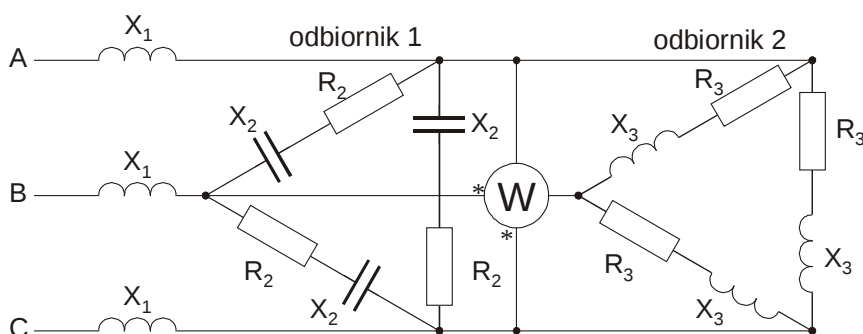


Rys. 9.4

Zadanie 9.5

W układzie przedstawionym na rys. 9.5 dwa odbiorniki, połączone w trójkąt, są zasilane poprzez linię o reaktancji X_1 . Watomierz jest włączony, tak aby na podstawie jego wskazań określić moc bierną odbiornika 2. Obliczyć wskazanie watomierza i moc bierną odbiornika 2. Zasilanie 3-fazowe symetryczne 660V.

Dane: $X_1=10\ \Omega$, $X_2=90\ \Omega$, $R_2=120\ \Omega$, $X_3=180\ \Omega$, $R_3=210\ \Omega$.

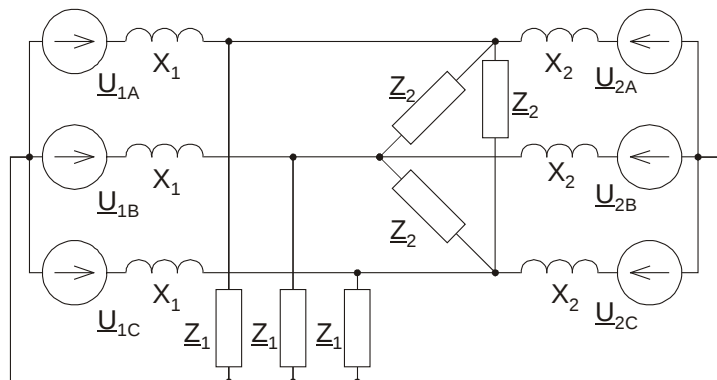


Rys. 9.5

Zadanie 9.6

Trójfazowy układ symetryczny, przedstawiony na rys. 9.6, zawiera dwa odbiorniki o impedancjach fazowych odpowiednio Z_1 i Z_2 . Obliczyć wartości prądów fazowych odbiorników i źródeł oraz wartość skuteczną napięcia zasilającego odbiorniki.

Dane: $\underline{U}_{1A}=\underline{U}_{2A}=127\text{ V}$, $X_1=2\ \Omega$, $X_2=3\ \Omega$, $Z_1=12+j8\ \Omega$, $Z_2=45+j27\ \Omega$.

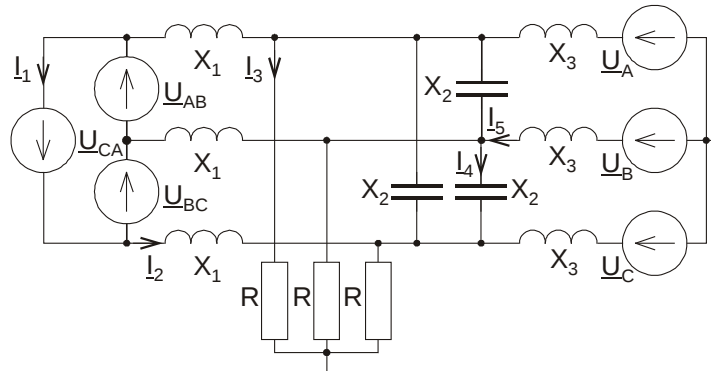


Rys. 9.6

Zadanie 9.7

W przedstawionym na rys. 9.7 układzie obliczyć prądy $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$, $\underline{I}_4$, $\underline{I}_5$.

Dane: $X_1=30\ \Omega$, $X_2=120\ \Omega$, $X_3=0\ \Omega$, $R=21\ \Omega$,
 $\underline{U}_{AB}=630e^{j40^\circ}\text{ V}$, $\underline{U}_{BC}=630e^{-j80^\circ}\text{ V}$, $\underline{U}_{CA}=630e^{j160^\circ}\text{ V}$,
 $\underline{U}_A=360e^{j10^\circ}\text{ V}$, $\underline{U}_B=360e^{-j110^\circ}\text{ V}$, $\underline{U}_C=360e^{j130^\circ}\text{ V}$,

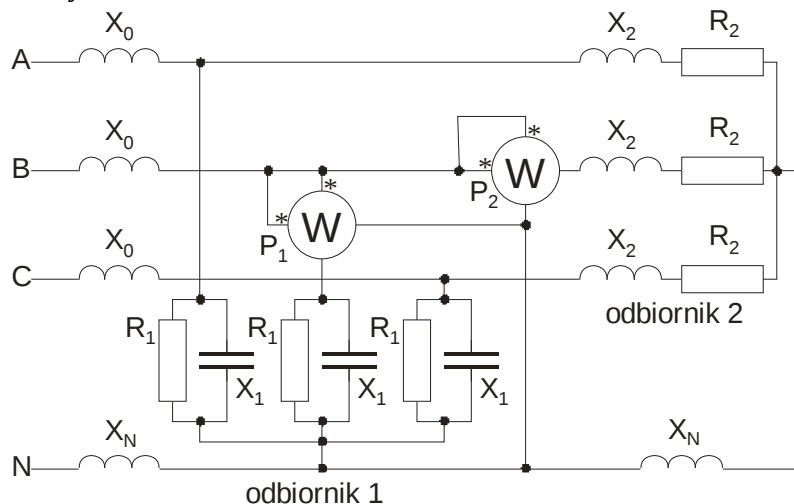


Rys. 9.7

Zadanie 9.8

Przedstawiony na rys. 9.8 obwód zawiera dwa odbiorniki połączone w gwiazdę i linię zasilającą o reaktancji X_0 . Poszczególne odcinki przewodu neutralnego posiadają reaktancję X_N . Obliczyć wskazania watomierzy oraz moc czynną pobieraną ze źródła.

Dane: $X_0=1,5\ \Omega$, $R_1=75\ \Omega$, $X_1=35\ \Omega$, $X_2=6\ \Omega$, $R_2=8\ \Omega$, $X_N=0,5\ \Omega$,
 zasilanie symetryczne $U=63\text{ V}$.

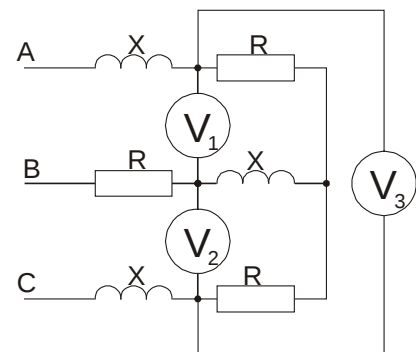


Rys. 9.8

Zadanie 9.9

Dla obwodu przedstawionego na rys. 9.9 narysować wykres fazorowy z uwzględnieniem napięć woltomierzy. Obliczyć wskazania woltomierzy.

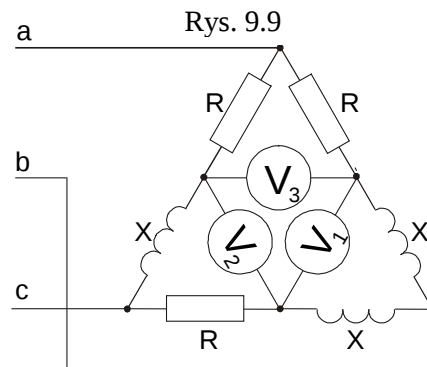
Dane: zasilanie symetryczne $U=400\text{ V}$, $R=X$.



Zadanie 9.10

Dla obwodu przedstawionego na rys. 9.10 narysować wykres fazorowy z uwzględnieniem napięć woltomierzy. Obliczyć wskazania woltomierzy.

Dane: zasilanie symetryczne $U=400\text{ V}$, $R=X$.

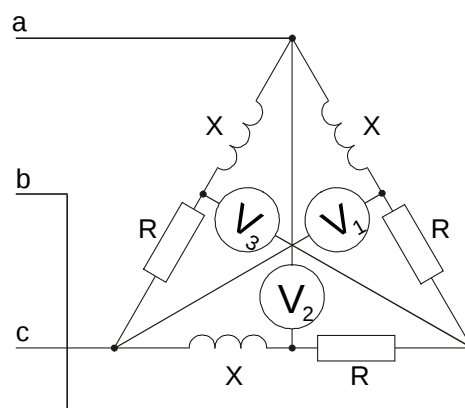


Rys. 9.10

Zadanie 9.11

Dla obwodu przedstawionego na rys. 9.11 narysować wykres fazorowy z uwzględnieniem napięć woltomierzy. Obliczyć wskazania woltomierzy.

Dane: zasilanie symetryczne $U=400\text{ V}$, $R=X$.

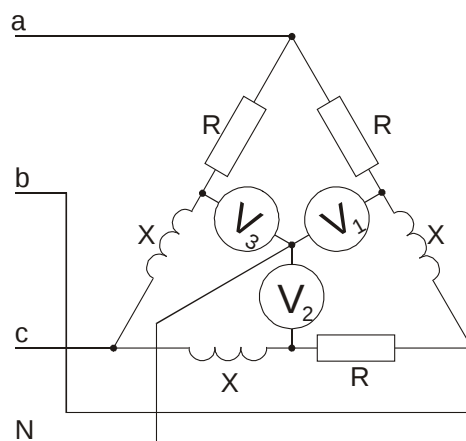


Rys. 9.11

Zadanie 9.12

Dla obwodu przedstawionego na rys. 9.12 narysować wykres fazorowy z uwzględnieniem napięć woltomierzy. Obliczyć wskazania woltomierzy.

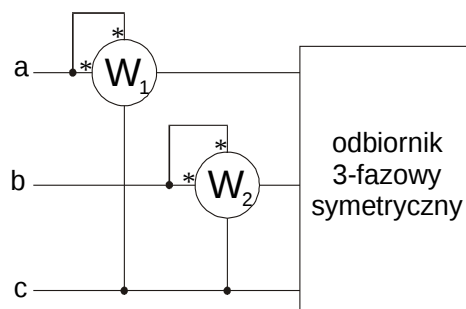
Dane: zasilanie symetryczne $400/231\text{ V}$, $R=X$.



Rys. 9.12

Zadanie 9.13

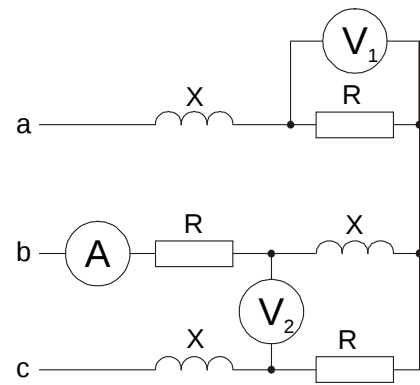
W układzie przedstawionym na rys. 9.13 watomierze wskazują: $P_{W1}=1\text{ kW}$, $P_{W2}=0\text{ W}$. Obliczyć współczynnik mocy $\cos\phi$ odbiornika.



Rys. 9.13

Zadanie 9.14

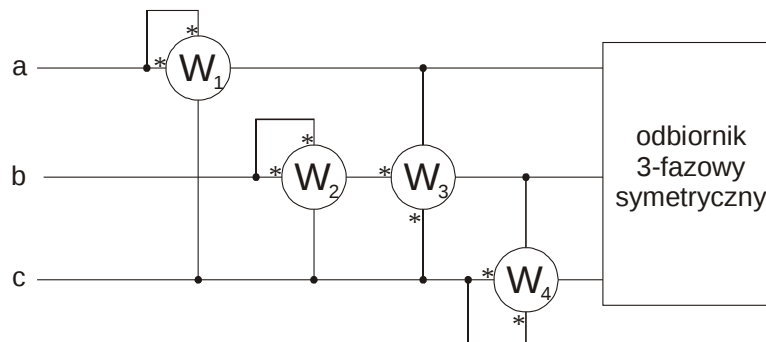
W układzie, jak na rys. 9.14, obliczyć R , X oraz napięcie zasilania U , jeżeli wskazania mierników wynoszą: $I_A=2,5$ A, $U_{V1}=75$ V, $U_{V2}=179$ V. Narysować wykres fazorowy.



Rys. 9.14

Zadanie 9.15

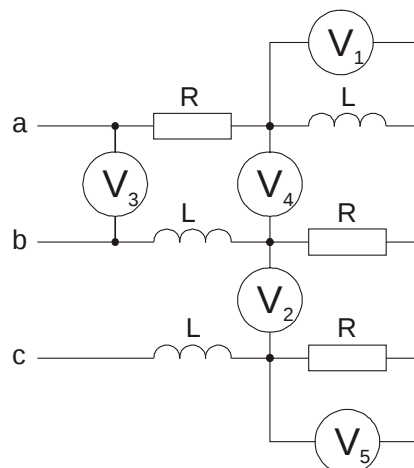
W układzie przedstawionym na rys. 9.15 watomierze wskazują: $P_{W1}=500$ W, $P_{W2}=1000$ W. Obliczyć wskazania pozostałych watomierzy. Do pomiaru jakiej wielkości fizycznej można wykorzystać watomierz W_3 ?



Rys. 9.15

Zadanie 9.16

W układzie przedstawionym na rys. 9.16 woltomierz V_1 wskazuje 172 V, a woltomierz V_4 wskazuje 315 V. Obliczyć wskazania pozostałych woltomierzy oraz narysować wykres fazorowy prądów i napięć.



Rys. 9.16

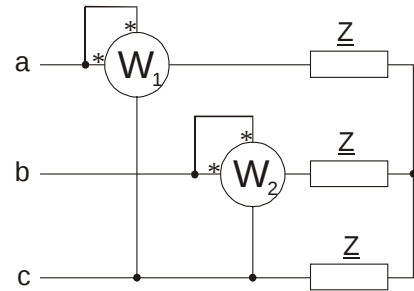
Zadanie 9.17

W układzie przedstawionym na rys. 9.17 symetryczne napięcie zasilania wynosi 520 V, zaś wskazania watomierzy wynoszą:

a) $P_1=0$ W, $P_2=5,4$ kW,

b) $P_1=P_2=5,4$ kW.

Obliczyć impedancję $\underline{Z}$ odbiornika.

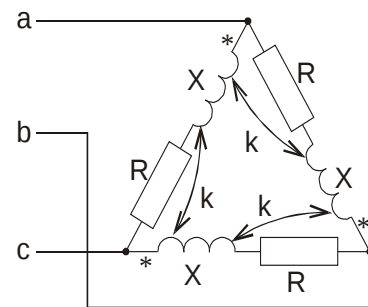


Rys. 9.17

Zadanie 9.18

Przedstawiony na rys. 9.18 układ jest zasilany trójfazowym napięciem symetrycznym o wartości przewodowej $U=400$ V. Obliczyć wartość skuteczną prądów fazowych i przewodowych oraz moc czynną układu i współczynnik mocy.

Dane: $R=30\ \Omega$, $X=30\ \Omega$, $k=0,2$.



Rys. 9.18

Zadanie 9.19

Dla 3-fazowego symetrycznego odbiornika o danych znamionowych $P_n=20$ kW, $U_n=400$ V, $\cos\varphi=0,8$ obliczyć parametry R , X schematu zastępczego w następujących wariantach połączeń :

- gwiazda, R i X połączone szeregowo,
- gwiazda, R i X połączone równolegle,
- trójkąt, R i X połączone szeregowo,
- trójkąt, R i X połączone równolegle.

SCHEMATY JEDNOKRESKOWE OBWODÓW TRÓJFAZOWYCH**Zadanie 9.20**

W przedstawionym na rys. 9.20 układzie trójfazowym obliczyć moce odbiorników i prąd pobierany ze źródła, jeżeli $U_z=15$ kV.

Dane znamionowe:

T_1 : $S_{T1n}=630$ kV·A, $U_{x1\%}=10\%$,

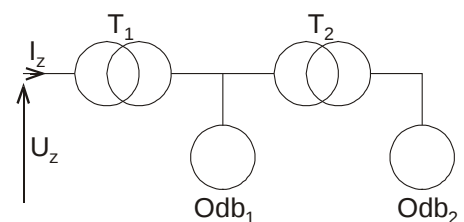
$\vartheta_{\square}=U_{T1n}^{(GN)}/U_{T1n}^{(DN)}=15/6,5$ kV/kV,

T_2 : $S_{T2n}=160$ kV·A, $U_{x2\%}=12\%$,

$\vartheta_2=U_{T2n}^{(GN)}/U_{T2n}^{(DN)}=6,3/0,4$ kV/kV,

Odb₁: $P_{1n}=300$ kW, $U_{1n}=6,3$ kV, $\cos\varphi_1=0,76$

Odb₂: $P_{2n}=100$ kW, $U_{2n}=380$ V, $\cos\varphi_2=0,82$



Rys. 9.20

Zadanie 9.21

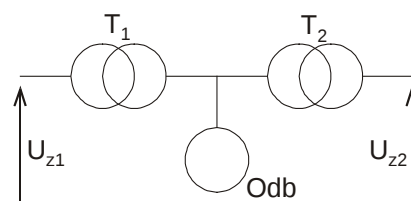
W układzie 3-fazowym, jak na rys. 9.21, obliczyć prądy i moce czynne odbiornika i źródeł, jeżeli $U_{z1}=30,5$ kV, $U_{z2}=15,8$ kV.

Dane znamionowe:

$$T_1: S_{T1n}=1 \text{ MV}\cdot\text{A}, \vartheta_1=31,25/3,3 \text{ kV/kV}, u_{1z\%}=12\%,$$

$$T_2: S_{T2n}=630 \text{ KV}\cdot\text{A}, \vartheta_2=15,5/3,3 \text{ kV/kV}, u_{2z\%}=9\%,$$

$$\text{Odb: } P_n=600 \text{ kW}, U_n=3,3 \text{ kV}, \cos\varphi_n=0,86.$$



Rys. 9.21

Zadanie 9.22

Do 3-fazowego systemu elektroenergetycznego przyłączono odbiorniki jak na rys. 9.22. Obliczyć napięcie U , prąd I , moc czynną P i $\cos\varphi$ na wejściu do układu, jeżeli odbiornik 1 pracuje w warunkach znamionowych.

Dane znamionowe:

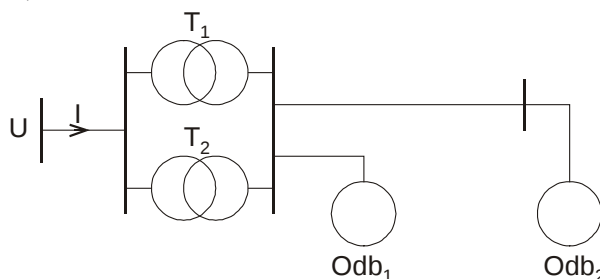
$$\text{Odb}_1: U_{1n}=110 \text{ kV}, S_{1n}=50 \text{ MV}\cdot\text{A}, \cos\varphi_1=0,7,$$

$$\text{Odb}_2: U_{2n}=110 \text{ kV}, P_{2n}=80 \text{ MW}, \cos\varphi_2=0,8,$$

$$T_1: U_{11n}/U_{12n}=10\text{kV}/110\text{kV}, S_{T1n}=100 \text{ MV}\cdot\text{A}, u_{z1}=11\%,$$

$$T_2: U_{21n}/U_{22n}=10\text{kV}/110\text{kV}, S_{T2n}=125 \text{ MV}\cdot\text{A}, u_{z2}=11\%,$$

$$\text{linia: } l=40 \text{ km}, X_l=0,4 \Omega/\text{km}.$$



Rys. 9.22

Zadanie 9.23

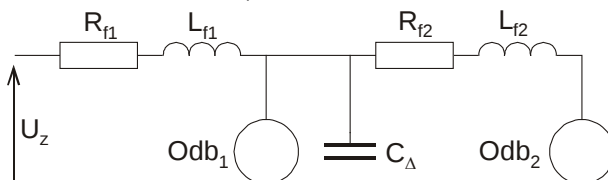
W układzie 3-fazowym, jak na rys. 9.23, obliczyć napięcie zasilania U_z oraz rzeczywistą moc czynną odbiornika 2, jeżeli odbiornik 1 pracuje znamionowo

Dane: $R_{f1}=0,1 \Omega$, $L_{f1}=0,5 \text{ mH}$, $R_{f2}=0,04 \Omega$, $L_{f2}=0,2 \text{ mH}$, $C_\Delta=80 \mu\text{F}$, $f=50 \text{ Hz}$.

Dane znamionowe:

$$\text{Odb}_1: U_{1n}=660 \text{ V}, P_{1n}=60 \text{ kW}, \cos\varphi_1=0,7,$$

$$\text{Odb}_2: U_{2n}=660 \text{ V}, P_{2n}=130 \text{ kW}, \cos\varphi_2=0,85$$



Rys. 9.23

Zadanie 9.24

Przedstawiony na rys. 9.24 układ 3-fazowy jest zasilany napięciem $U_z=106$ kV. Obliczyć prąd zasilający I_z , moce pobierane ze źródła oraz współczynnik mocy na zaciskach źródła.

Dane znamionowe:

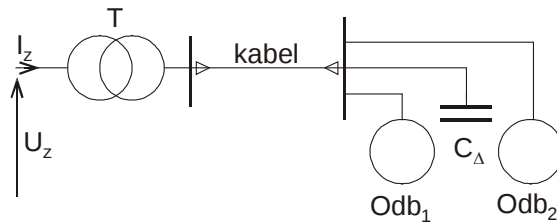
$$T: S_{Tn}=2,5 \text{ MV}\cdot\text{A}, \vartheta=112/3 \text{ kV/kV}, U_{z\%}=8\%$$

$$\text{Odb}_1: P_{1n}=800 \text{ kW}, U_n=3 \text{ kV}, \cos\varphi_{1n}=0,78$$

Odb₂: $P_{2n}=600 \text{ kW}$, $U_{1n}=3 \text{ kV}$, $\cos\varphi_{2n}=0,7$

Bateria: $Q_n=1 \text{ Mvar}$, $U_{Cn}=3,3 \text{ kV}$

Kabel: $l=150 \text{ m}$, $R_l=0,2 \Omega/\text{km}$, $X_l=0,35 \Omega/\text{km}$.



Rys. 9.24

Zadanie 9.25

Zadanie 9.24 rozwiązać przy założeniu, że napięcie zasilające U_z dobrano tak, aby odbiorniki pracowały w warunkach znamionowych.

Zadanie 9.26

W przedstawionym na rys. 9.26 układzie 3-fazowym obliczyć prądy i moce czynne odbiorników i generatora oraz prąd i moc czynną pobieraną z systemu elektroenergetycznego.

Dane znamionowe:

G: $P_{Gn}=500 \text{ MW}$, $U_{Gn}=12,5 \text{ kV}$,

$\cos\varphi_{Gn}=0,86$, $u_G=1,2$, $x_{G\%}=25\%$,

T_1 : $S_{T1n}=840 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_1 = U_{T1n}^{(GN)} / U_{T1n}^{(DN)} = 110/15,75$,

$u_{z1\%}=6\%$,

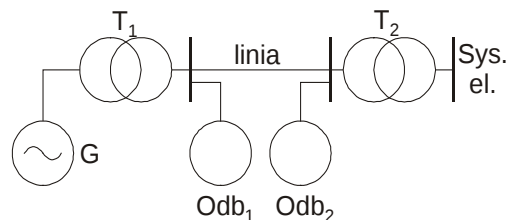
Linia: $l=15 \text{ km}$, $X_{km}=0,4 \Omega/\text{km}$,

Odb₁: $P_{1n}=800 \text{ MW}$, $U_{1n}=110 \text{ kV}$, $\cos\varphi_1=0,74$,

Odb₂: $P_{2n}=480 \text{ MW}$, $U_{2n}=110 \text{ kV}$, $\cos\varphi_2=0,82$,

T_2 : $S_{T2n}=630 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_2 = U_{T2n}^{(GN)} / U_{T2n}^{(DN)} = 400/115 \text{ kV/kV}$, $u_{z2\%}=5\%$,

System el.: $S_z=1 \text{ GV}\cdot\text{A}$, $U_S=400 \text{ kV}$.



Rys. 9.26

Zadanie 9.27

W przedstawionym na rys. 9.27 układzie trójfazowym obliczyć napięcie, prąd oraz moc czynną i bierną w miejscu zasilania, jeżeli:

a) Odbiornik 3 pracuje w warunkach znamionowych.

b) Odbiornik 1 pracuje w warunkach znamionowych.

Dane znamionowe:

T_1 : $S_{T1n}=2,2 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_1=110/15,75 \text{ kV/kV}$, $u_{z1\%}=8 \%$,

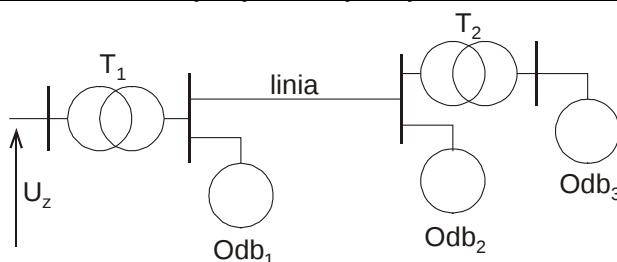
T_2 : $S_{T2n}=630 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_2=15/0,69 \text{ kV/kV}$, $u_{z2\%}=10 \%$,

Odb₁: $P_{1n}=360 \text{ kW}$, $U_{1n}=15 \text{ kV}$, $\cos\varphi_{1n}=0,88$,

Odb₂: $P_{2n}=1,1 \text{ MW}$, $U_{2n}=15 \text{ kV}$, $\cos\varphi_{2n}=0,84$,

Odb₃: $P_{3n}=280 \text{ kW}$, $U_{3n}=660 \text{ V}$, $\cos\varphi_{3n}=0,76$,

Linia: $l=16 \text{ km}$, $R_l=0,25 \Omega/\text{km}$, $X_l=0,35 \Omega/\text{km}$.



Rys. 9.27

Zadanie 9.28

W układzie 3-fazowym, jak na rys. 9.28, odbiornik 3 pracuje z mocą równą 70% swojej mocy znamionowej. Obliczyć moce i prądy pozostałych odbiorników oraz napięcie zasilające.

Dane znamionowe:

T_1 : $S_{T1n}=50 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $9_1=400/110 \text{ kV/kV}$, $u_{z1\%}=10,5 \%$,

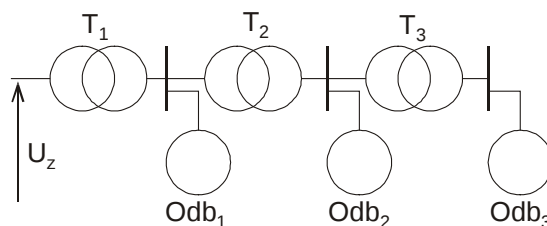
T_2 : $S_{T2n}=31,5 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $9_2=110/30 \text{ kV/kV}$, $u_{z2\%}=9 \%$,

T_3 : $S_{T3n}=25 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $9_3=30/3 \text{ kV/kV}$, $u_{z3\%}=8 \%$,

Odb1: $P_{1n}=16 \text{ MW}$, $U_{1n}=110 \text{ kV}$, $\cos\varphi_{1n}=0,8$,

Odb2: $P_{2n}=8 \text{ MW}$, $U_{2n}=30 \text{ kV}$, $\cos\varphi_{2n}=0,82$,

Odb3: $P_{3n}=16 \text{ MW}$, $U_{3n}=3 \text{ kV}$, $\cos\varphi_{3n}=0,78$.



Rys. 9.28

Zadanie 9.29

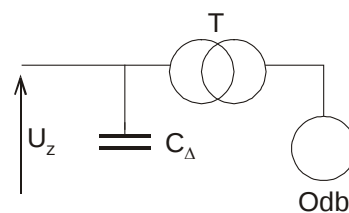
W układzie trójfazowym, jak na rys. 9.29, dobrać pojemność kondensatorów C_Δ w układzie połączenia w trójkąt, aby współczynnik mocy całego układu był równy 0,96. Obliczyć rzeczywistą moc czynną pobieraną przez odbiornik, jeżeli napięcie zasilania U_z wynosi 14,8 kV.

Dane znamionowe:

odbiornik: $U_n=380 \text{ V}$, $P_n=50 \text{ kW}$, $\cos\varphi=0,84$,

transformator: $U_{1n}/U_{2n}=15 \text{ kV}/0,4 \text{ kV}$, $S_{Tn}=63 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $u_{z\%}=9\%$,

$\omega=314 \text{ s}^{-1}$.



Rys. 9.29

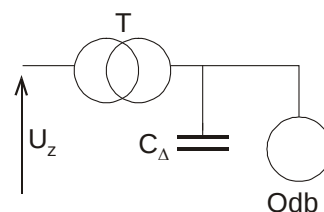
Zadanie 9.30

W układzie trójfazowym pokazanym na rys. 9.30 odbiornik skompensowano do $\cos\varphi=0,95$. Obliczyć rzeczywistą moc czynną pobieraną przez odbiornik, jeżeli napięcie zasilania $U_z=15,5 \text{ kV}$.

Dane znamionowe:

Odb: $U_n=380 \text{ V}$, $P_n=60 \text{ kW}$, $\cos\varphi=0,8$,

T: $U_{1n}/U_{2n}=15 \text{ kV}/0,4 \text{ kV}$, $S_{Tn}=63 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $u_{z\%}=8\%$.



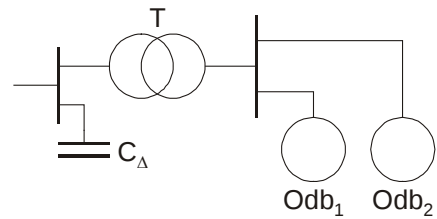
Rys. 9.30

Zadanie 9.31

W danym na rys. 9.31 układzie obliczyć pojemność jednej fazy i moc baterii kondensatorów połączonych w trójkąt, tak aby współczynnik mocy układu wynosił $\cos\varphi=0,9$. Napięcie zasilania układu wynosi 15 kV.

Dane znamionowe:

$$\begin{aligned} T: S_{Tn} &= 630 \text{ kV}\cdot\text{A}, \vartheta = 15/0,4 \text{ kV/kV}, u_{z\%} = 10\% \\ \text{Odb}_1: P_{1n} &= 300 \text{ kW}, U_{1n} = 380 \text{ V}, \cos\varphi_{1n} = 0,72 \\ \text{Odb}_2: P_{2n} &= 200 \text{ kW}, U_{2n} = 380 \text{ V}, \cos\varphi_{2n} = 0,78 \\ \omega &= 314 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$



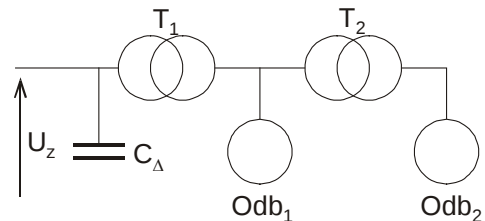
Rys. 9.31

Zadanie 9.32

W danym na rys. 9.32 układzie 3-fazowym obliczyć pojemność jednej fazy baterii kondensatorów połączonych w trójkąt kompensującej układ do $\cos\varphi=0,9$. Obliczyć prąd i moc pozorną pobieraną ze źródła przed i po zastosowaniu kompensacji, przy założeniu, że odbiornik 2 ma znamionowe warunki pracy.

Dane znamionowe :

$$\begin{aligned} T_1: S_{T1n} &= 500 \text{ kV}\cdot\text{A}, \vartheta_1 = 15/0,4 \text{ kV/kV}, u_{z1\%} = 6\%, \\ T_2: S_{T2n} &= 200 \text{ kV}\cdot\text{A}, \vartheta_2 = 0,4/0,23 \text{ kV/kV}, u_{z2\%} = 5\%, \\ \text{Odb}_1: P_{1n} &= 220 \text{ kW}, U_{1n} = 380 \text{ V}, \cos\varphi_{1n} = 0,76, \\ \text{Odb}_2: P_{2n} &= 160 \text{ kW}, U_{2n} = 220 \text{ V}, \cos\varphi_{2n} = 0,82 \\ \omega &= 314 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$



Rys. 9.32

Zadanie 9.33

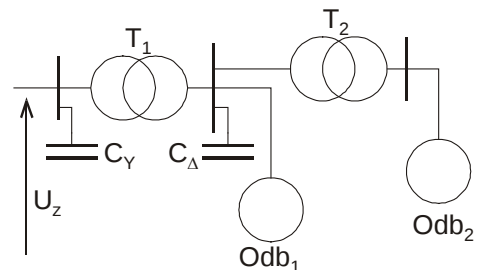
W przedstawionym na rys. 9.33 układzie trójfazowym obliczyć pojemność C_Y jednej fazy baterii kondensatorów połączonych w gwiazdę, tak aby współczynnik mocy całego układu wynosił 0,9. Obliczyć prąd pobierany ze źródła przed i po dołączeniu tej baterii, jeżeli $U_z=105 \text{ kV}$.

Dane znamionowe:

$$\begin{aligned} T_1: S_{T1n} &= 2,5 \text{ MV}\cdot\text{A}, \vartheta_1 = 110/15 \text{ kV/kV}, \\ &u_{z1\%} = 7\%, \\ T_2: S_{T2n} &= 1 \text{ MV}\cdot\text{A}, \vartheta_2 = 15/0,4 \text{ kV/kV}, u_{z2\%} = 5,5 \end{aligned}$$

%,

$$\begin{aligned} \text{Odb}_1: P_{1n} &= 900 \text{ kW}, U_{1n} = 15 \text{ kV}, \cos\varphi_{1n} = 0,75, \\ \text{Odb}_2: P_{2n} &= 600 \text{ kW}, U_{2n} = 380 \text{ V}, \cos\varphi_{2n} = 0,8 \\ \text{Bateria } C_{\Delta}: Q_n &= 135 \text{ kvar}, U_{Cn} = 15 \text{ kV} \\ \omega &= 314 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$



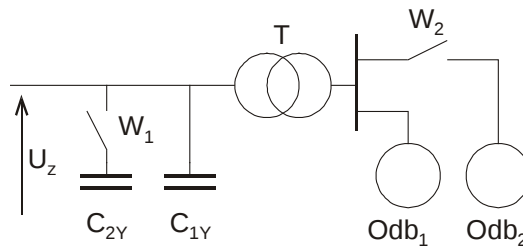
Rys. 9.33

Zadanie 9.34

W układzie, jak na rys. 9.34, pojemność kondensatorów C_{1Y} połączonych w gwiazdę dobrano tak, aby współczynnik mocy układu zawierającego tylko odbiornik 1 był równy 0,9. Obliczyć pojemność C_{1Y} . Obliczyć pojemność C_{2Y} drugiej baterii połączonych w gwiazdę, jaką należy dołączyć po włączeniu odbiornika 2, aby współczynnik mocy nie uległ zmianie.

Dane znamionowe:

T: $U_{1n}/U_{2n}=15\text{ kV}/0,4\text{ kV}$, $S_{Tn}=630\text{ kV}\cdot\text{A}$, $u_z=8\%$,
 Odb₁: $U_{1n}=380\text{ V}$, $P_{1n}=80\text{ kW}$, $\cos\varphi_{1n}=0,7$,
 Odb₂: $U_{2n}=400\text{ V}$, $P_{2n}=100\text{ kW}$, $\cos\varphi_{2n}=0,85$,
 $f=50\text{ Hz}$.



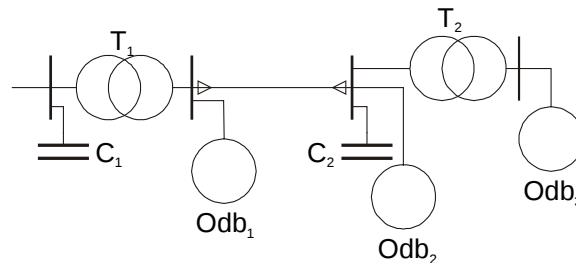
Rys. 9.34

Zadanie 9.35

W układzie 3-fazowym przedstawionym na rys. 9.35 włączono dwie baterie kondensatorów połączonych w gwiazdę w celu kompensacji mocy biernej. Pojemności baterii dobrano tak aby współczynnik mocy w miejscu ich przyłączenia wynosił 0,9. Obliczyć pojemność jednej fazy w obu bateriach. Obliczyć prąd pobierany przez układ przed i po zastosowaniu kompensacji jeżeli $U_z=110\text{ kV}$.

Dane znamionowe:

T_1 : $S_{T1n}=16\text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_1=110/15\text{ kV/kV}$, $u_{z1\%}=10\%$,
 T_2 : $S_{T2n}=5\text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_2=15/6,25\text{ kV/kV}$, $u_{z2\%}=8\%$,
 Odb₁: $P_{1n}=5\text{ MW}$, $U_{1n}=15\text{ kV}$, $\cos\varphi_{1n}=0,7$,
 Odb₂: $P_{2n}=3,5\text{ MW}$, $U_{2n}=15\text{ kV}$, $\cos\varphi_{2n}=0,85$,
 Odb₃: $P_{3n}=2,5\text{ MW}$, $U_{3n}=6\text{ kV}$, $\cos\varphi_{3n}=0,74$,
 linia kablowa: $l=1500\text{ m}$, $X_l=0,3\ \Omega/\text{km}$, $R_l=0,1\ \Omega/\text{km}$,
 $\omega=314\text{ s}^{-1}$.



Rys. 9.35

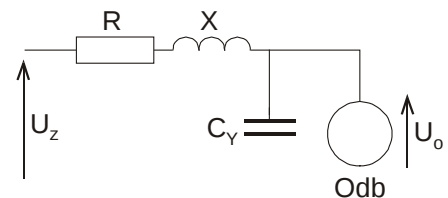
Zadanie 9.36

W układzie 3-fazowym, jak na rys. 9.36, obliczyć jakie wartości powinny mieć pojemności C_Y kondensatorów połączonych w gwiazdę, aby $U_z=U_o$. Wykonać wykres fazorowy prądów i napięć dla jednej fazy.

Dane: $R=8\ \Omega$, $X=11\ \Omega$, $f=50\text{ Hz}$.

Dane znamionowe:

Odb: $P_o=1,4\text{ MW}$, $U_o=15\text{ kV}$, $\cos\varphi_o=0,8$,



Rys. 9.36

Zadanie 9.37

W układzie 3-fazowym, jak na rys. 9.37, obliczyć jakie wartości powinny mieć pojemności C_Δ kondensatorów połączonych w trójkąt, aby $U_z=9U_o$. Wykonać wykres fazorowy prądów i napięć dla jednej fazy.

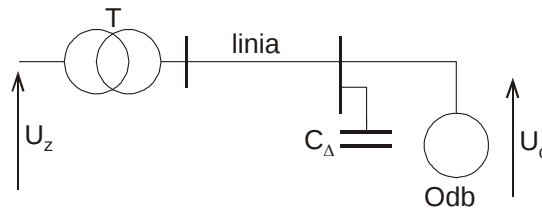
Dane znamionowe:

odbiornik: $U_n=380\text{ V}$, $P_n=100\text{ kW}$, $\cos\varphi=0,82$,

transformator: $\vartheta=6,3\text{ kV}/0,4\text{ kV}$, $S_{Tn}=160\text{ kV}\cdot\text{A}$, $u_z=8\%$,

linia: $l=20\text{ km}$, $x=10\text{ m}\Omega/\text{km}$,

$f=50\text{ Hz}$.



Rys. 9.37

Zadanie 9.38

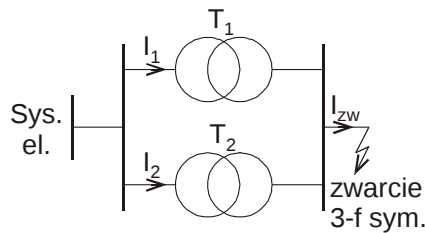
W przedstawionym na rys. 9.38 układzie 3-fazowym nastąpiło zwarcie symetryczne. Obliczyć prąd w miejscu zwarcia oraz prądy transformatorów po stronie zasilania.

Dane znamionowe:

T_1 : $S_{T1n}=160\text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_1=U_{T1n}^{(GN)}/U_{T1n}^{(DN)}=400/115\text{ kV/kV}$, $u_{z1\%}=5\%$

T_2 : $S_{T2n}=250\text{ kV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_2=U_{T2n}^{(GN)}/U_{T2n}^{(DN)}=400/115\text{ kV/kV}$, $u_{z2\%}=10\%$

System elektroenergetyczny: $U_S=400\text{ kV}$, $S_{zw}=1\text{ GV}\cdot\text{A}$.



Rys. 9.38

Zadanie 9.39

W układzie 3-fazowym przedstawionym na rys. 9.39 nastąpiło zwarcie 3-fazowe symetryczne w miejscu zaznaczonym na schemacie. Obliczyć prąd zwarcia I_{zw} oraz prądy generatorów I_{G1} oraz I_{G2} .

Dane znamionowe:

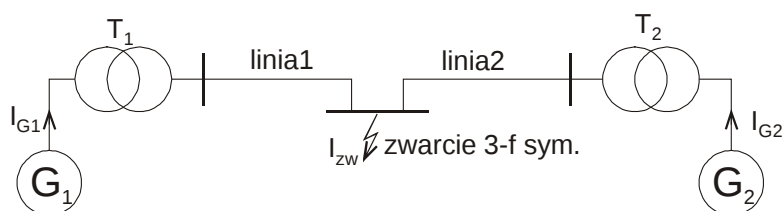
G_1 : $U_{G1n}=10,5\text{ kV}$, $S_{G1n}=100\text{ MV}\cdot\text{A}$, $e_{G1}=1,2$, $X_{G1}=1,2$,

G_2 : $U_{G2n}=6,3\text{ kV}$, $S_{G2n}=120\text{ MV}\cdot\text{A}$, $e_{G2}=1,2$, $X_{G2}=1,5$,

T_1 : $U_{11n}/U_{12n}=121\text{ kV}/11\text{ kV}$, $S_{T1n}=120\text{ MV}\cdot\text{A}$, $u_{z1\%}=10\%$,

T_2 : $U_{21n}/U_{22n}=121\text{ kV}/6,6\text{ kV}$, $S_{T2n}=150\text{ MV}\cdot\text{A}$, $u_{z2\%}=10\%$,

Linia 1 i 2: $l=60\text{ km}$, $X_l=0,36\text{ }\Omega/\text{km}$,



Rys. 9.39

Zadanie 9.40

W układzie 3-fazowym danym na rys. 9.40 obliczyć prąd w miejscu, gdzie wystąpiło zwarcie 3-fazowe symetryczne, oraz prądy pobierane z systemów elektroenergetycznych.

Dane znamionowe:

System elektroenergetyczny 1: $S_{z1} = 900 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $U_{1n} = 110 \text{ kV}$,

System elektroenergetyczny 2: $S_{z2} = 1000 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $U_{2n} = 220 \text{ kV}$,

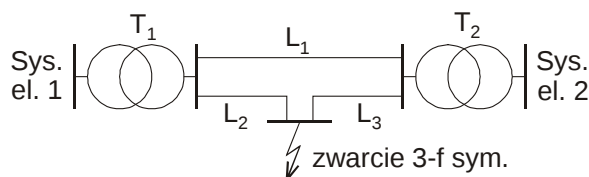
T_1 : $S_{T1n} = 80 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $\vartheta_1 = 110/15 \text{ kV/kV}$, $u_{z1\%} = 8,5 \%$,

T_2 : $S_{T2n} = 63 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $\vartheta_2 = 220/15 \text{ kV/kV}$, $u_{z2\%} = 8 \%$,

L_1 : $l_1 = 3 \text{ km}$, $X_{l1} = 0,44 \Omega/\text{km}$,

L_2 : $l_2 = 4,5 \text{ km}$, $X_{l2} = 0,39 \Omega/\text{km}$,

L_3 : $l_3 = 6 \text{ km}$, $X_{l3} = 0,4 \Omega/\text{km}$,



Rys. 9.40

Zadanie 9.41

W układzie 3-fazowym przedstawionym na rys. 9.41 wystąpiło zwarcie symetryczne na szynach strony wtórnej transformatora T_2 . Obliczyć prąd w miejscu zwarcia oraz prąd pobierany z systemu elektroenergetycznego i z prądnicy.

Dane znamionowe:

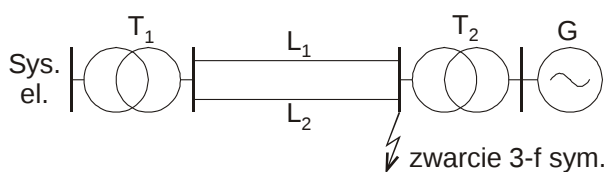
T_1 : $S_{T1n} = 315 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $\vartheta_1 = 220/110 \text{ kV/kV}$, $u_{z1\%} = 10 \%$,

T_2 : $S_{T2n} = 250 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $\vartheta_2 = 110/12,5 \text{ kV/kV}$, $u_{z2\%} = 10 \%$,

G : $P_n = 200 \text{ MW}$, $U_n = 12,5 \text{ kV}$, $\cos\varphi_n = 0,8$, $e = 1,15$, $x_{\%} = 25 \%$,

System elektroenergetyczny: $S_{zw} = 900 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $U_s = 220 \text{ kV}$,

L_1, L_2 : $l = 50 \text{ km}$, $X_l = 0,44 \Omega/\text{km}$.



Rys. 9.41

Zadanie 9.42

W układzie 3-fazowym przedstawionym na rys. 9.42 wystąpiło zwarcie symetryczne na szynach strony wtórnej transformatora T_3 . Obliczyć prąd w miejscu zwarcia i prądy pobierane z systemów elektroenergetycznych.

Dane znamionowe:

system elektroenergetyczny 1: $S_{z1} = 1100 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $U_{1n} = 110 \text{ kV}$,

system elektroenergetyczny 2: $S_{z2} = 1600 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $U_{2n} = 400 \text{ kV}$,

T_1 : $S_{T1n} = 200 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $\vartheta_1 = 400/110 \text{ kV/kV}$, $u_{z1\%} = 9,5 \%$,

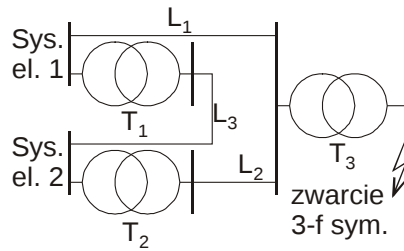
T_2 : $S_{T2n} = 315 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $\vartheta_2 = 400/110 \text{ kV/kV}$, $u_{z2\%} = 10 \%$,

T_3 : $S_{T3n} = 125 \text{ MV} \cdot \text{A}$, $\vartheta_3 = 110/6 \text{ kV/kV}$, $u_{z3\%} = 8 \%$,

L_1 : $l_1 = 40 \text{ km}$, $X_{l1} = 0,4 \Omega/\text{km}$,

L_2 : $l_2 = 55 \text{ km}$, $X_{l2} = 0,39 \Omega/\text{km}$,

$L_3: l_3=90 \text{ km}, X_{l3}=0,46 \Omega/\text{km},$



Rys. 9.42

Zadanie 9.43

W układzie trójfazowym przedstawionym na rys. 9.43 nastąpiło zwarcie symetryczne w miejscu zaznaczonym na schemacie. Obliczyć prąd I generatora.

Dane znamionowe:

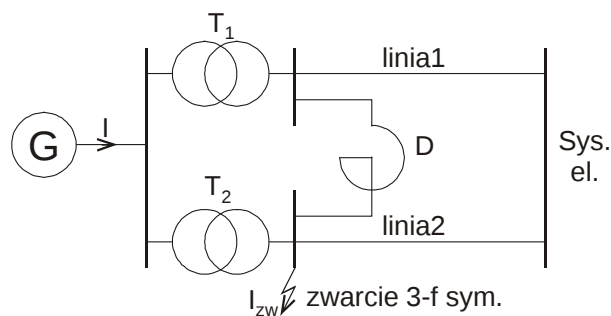
generator: $U_{zG} = 1,2U_{Gn}$, $U_{Gn}=15 \text{ kV}$, $X_{G\%}=20\%$, $S_{Gn}=200 \text{ MV}\cdot\text{A}$.

transformatory 1 i 2: $U_{1n}/U_{2n}=15\text{kV}/110\text{kV}$, $S_{Tn}=120 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $u_{z\%}=9\%$,

linia 1 i 2: $l=50 \text{ km}$, $X_l=0,4 \Omega/\text{km}$,

system: $S_z=2 \text{ GV}\cdot\text{A}$, $U_{Sn}=110 \text{ kV}$,

dławik: $U_{Dn}=110 \text{ kV}$, $I_{Dn}=1 \text{ kA}$, $X_{D\%}=7\%$.



Rys. 9.43

Zadanie 9.44

W przedstawionym na rys. 9.44 układzie 3-fazowym wystąpiło zwarcie trójfazowe symetryczne po stronie wtórnej transformatora. Obliczyć prąd w miejscu zwarcia i prądy generatorów.

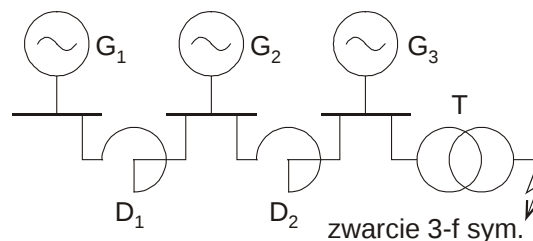
Dane znamionowe:

$G_1, G_2: S_{Gn}=1500 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $U_{Gn}=400 \text{ kV}$, $e_G=1,2$, $x_{G\%}=50 \%$,

$G_3: S_{G3n}=1000 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $U_{G3n}=400 \text{ kV}$, $e_{G3}=1,25$, $x_{G3\%}=70 \%$,

$D_1, D_2: U_{Dn}=400 \text{ V}$, $I_{Dn}=2500 \text{ A}$, $X_{D\%}=30 \%$,

$T: S_{Tn}=400 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $\vartheta=400/230 \text{ V/V}$, $u_{z\%}=5\%$,



Rys. 9.44

Zadanie 9.45

W 3-fazowym symetrycznym układzie przedstawionym na rys. 9.45 nastąpiło zwarcie 3-fazowe symetryczne w miejscu zaznaczonym na schemacie. Obliczyć prąd w linii L oraz w miejscu zwarcia.

Dane:

T_1 : $S_{T1n}=60 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_1=110/15 \text{ kV /kV}$, $u_{z1\%}=10 \%$,

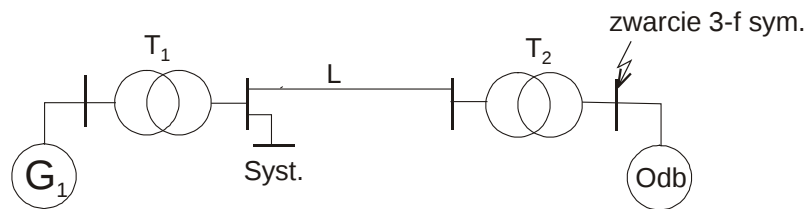
T_2 : $S_{T2n}=60 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_2=110/60 \text{ kV/kV}$, $u_{z2\%}=8 \%$,

G : $S_{Gn}=60 \text{ MVA}$, $U_{Gn}=15 \text{ kV}$, $e=1,2$, $x_{G\%}=17 \%$,

Odb: $U_n=60 \text{ kV}$, $P_n=50 \text{ MW}$, $\cos\varphi=0,9$,

System el.: $S_{zw}\rightarrow\infty$, $U_S=110 \text{ kV}$,

L : $l=50 \text{ km}$, $x_l=0,4 \Omega/\text{km}$.



Rys. 9.45

Zadanie 9.46

W 3-fazowym symetrycznym układzie przedstawionym na rys. 9.46 nastąpiło zwarcie 3-fazowe symetryczne w miejscu zaznaczonym na schemacie. Obliczyć prąd w miejscu zwarcia oraz prąd generatora.

Dane:

T_1 : $S_{T1n}=125 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_1=10 /110 \text{ kV /kV}$, $u_{z1\%}=11 \%$,

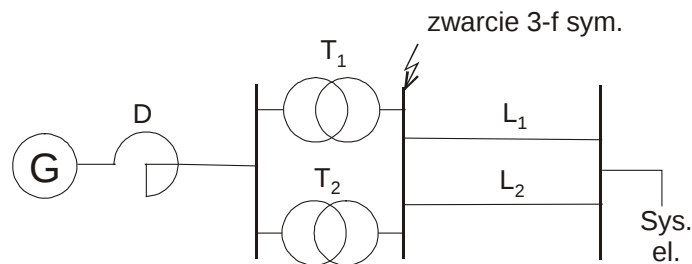
T_2 : $S_{T2n}=100 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_2=10/110 \text{ kV/kV}$, $u_{z2\%}=11 \%$,

G : $S_{Gn}=200 \text{ MVA}$, $U_{Gn}=11 \text{ kV}$, $e_G=1,1$, $x_{G\%}=25 \%$,

D : $U_{Dn}=15 \text{ kV}$, $I_{Dn}=20 \text{ kA}$, $u_{D\%}=6 \%$,

System el.: $S_{zw}\rightarrow 800 \text{ MVA}$, $U_S=110 \text{ kV}$,

L_1, L_2 : $l=30 \text{ km}$, $x_l=0,40 \Omega/\text{km}$.



Rys. 9.46

Zadanie 9.47

W 3-fazowym symetrycznym układzie przedstawionym na rys. 9.47 nastąpiło zwarcie 3-fazowe symetryczne w miejscu zaznaczonym na schemacie. Obliczyć prąd w miejscu zwarcia oraz prąd generatora.

Dane znamionowe:

T_1 : $S_{T1n}=100 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_1=220/15 \text{ kV /kV}$, $u_{z1\%}=10 \%$,

T_2 : $S_{T2n}=200 \text{ MV}\cdot\text{A}$, $\vartheta_2=220/110 \text{ kV/kV}$, $u_{z2\%}=12 \%$,

G : $S_{Gn}=100 \text{ MVA}$, $U_{Gn}=15 \text{ kV}$, $e_G=1,1$, $x_{G\%}=21 \%$,

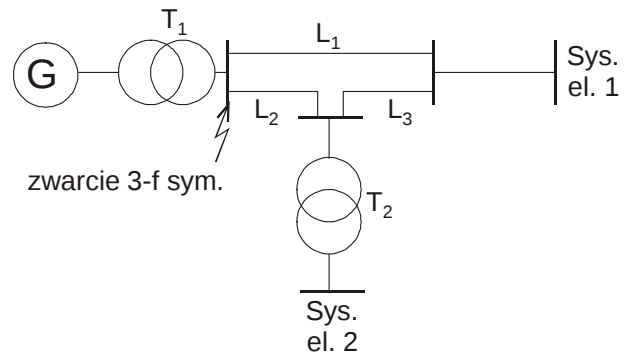
D: $U_{Dn}=15$ kV, $I_{Dn}=20$ kA, $x_{D\%}=6$ %,

System el. 1: $S_{zw1}=1000$ MVA, $U_{S1}=220$ kV,

System el. 2: $S_{zw2}\rightarrow\infty$, $U_{S2}=110$ kV,

linia L_1 : $l_1=100$ km, $x_1=0,40$ Ω /km.

linie L_2, L_3 : $l_2=80$ km, $x_2=0,40$ Ω /km.



Rys. 9.47

10. OBWODY TRÓJFAZOWE NIESYMETRYCZNE

Zadanie 10.1

Na skutek błędnego połączenia, kierunek napięcia w fazie A źródła zasilającego odbiornik trójfazowy symetryczny uległ odwróceniu, jak pokazuje rys. 10.1. Obliczyć prądy fazowe i prąd w przewodzie neutralnym oraz moc czynną pobieraną przez odbiornik. Ile wynosiłaby ta moc przy prawidłowym połączeniu przewodów ?

Dane: $\underline{U}_A=230\text{ V}$, $\underline{U}_B=230e^{-j120^\circ}\text{ V}$, $\underline{U}_C=230e^{j120^\circ}\text{ V}$, $\underline{Z}=16+j9\ \Omega$, $X=4\ \Omega$.

Zadanie 10.2

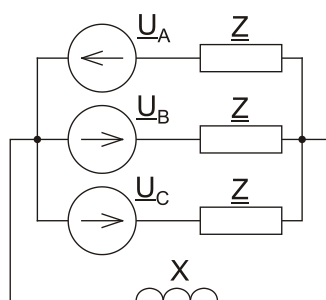
Przy podłączaniu do źródła odbiornika trójfazowego symetrycznego, o impedancji fazowej $\underline{Z}$, zamieniono końcówki przewodu fazowego i neutralnego, jak na rys. 10.2. Obliczyć prądy fazowe i prąd w przewodzie neutralnym. Sporządzić bilans mocy.

Dane: $\underline{U}_A=230\text{ V}$, $\underline{U}_B=230e^{-j120^\circ}\text{ V}$, $\underline{U}_C=230e^{j120^\circ}\text{ V}$, $\underline{Z}=16+j9\ \Omega$, $X=4\ \Omega$.

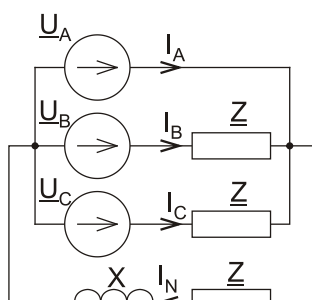
Zadanie 10.3

W przedstawionym na rys. 10.3 układzie trójfazowym symetrycznym dokonano pomiaru napięć trzema niejednakowymi woltomierzami o rezystancjach wewnętrznych R_{V1} , R_{V2} , R_{V3} . Obliczyć wskazania woltomierzy zaniedbując ich wpływ na rozkład napięć w obwodzie. Jakie napięcia wskazywałyby woltomierze idealne?

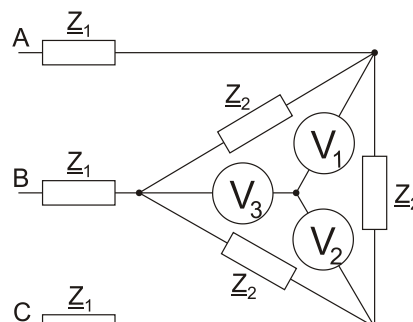
Dane: $R_{V1}=450\text{ k}\Omega$, $R_{V2}=750\text{ k}\Omega$, $R_{V3}=600\text{ k}\Omega$, $\underline{Z}_1=j2\ \Omega$, $\underline{Z}_2=24+j18\ \Omega$, napięcie zasilające $U=400\text{ V}$.



Rys. 10.1



Rys. 10.2



Rys. 10.3

Zadanie 10.4

Do pomiaru napięć w układzie trójfazowym symetrycznym, przedstawionym na rys. 10.4 użyto trzech różnych woltomierzy o rezystancjach wewnętrznych R_{V1} , R_{V2} , R_{V3} . Obliczyć wskazania woltomierzy dla dwóch przypadków:

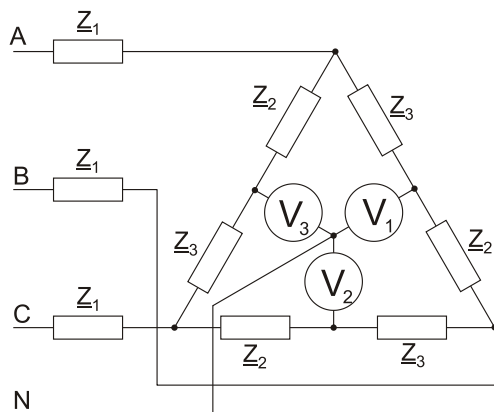
- Przewód neutralny przerwany.
- Przewód neutralny ciągły.

Przyjąć, że woltomierze mają pomijalny wpływ na rozkład napięć w obwodzie.

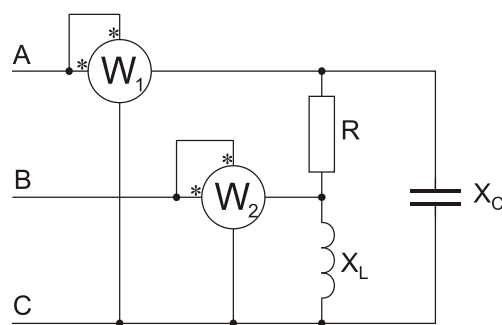
Dane: $R_{V1}=50\text{ k}\Omega$, $R_{V2}=750\text{ k}\Omega$, $R_{V3}=600\text{ k}\Omega$, $\underline{Z}_1=1+j2\ \Omega$, $\underline{Z}_2=2-j\ \Omega$, $\underline{Z}_3=10+j10\ \Omega$, napięcie zasilające $U=120\text{ V}$.

Zadanie 10.5

W układzie jak na rys. 10.5 obliczyć wskazania watomierzy oraz całkowitą moc czynną i bierną pobieraną przez układ, jeżeli napięcie zasilające symetryczne wynosi 380 V , zaś $R=X_L=X_C=10\ \Omega$.



Rys. 10.4



Rys. 10.5

Zadanie 10.6

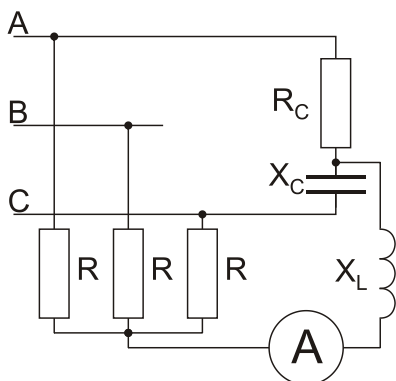
W danym na rys. 10.6 układzie obliczyć wskazanie amperomierza.

Dane: $R=300\ \Omega$, $R_C=100\ \Omega$, $X_C=100\ \Omega$, $X_L=50\ \Omega$, zasilanie symetryczne $U=380\text{ V}$.

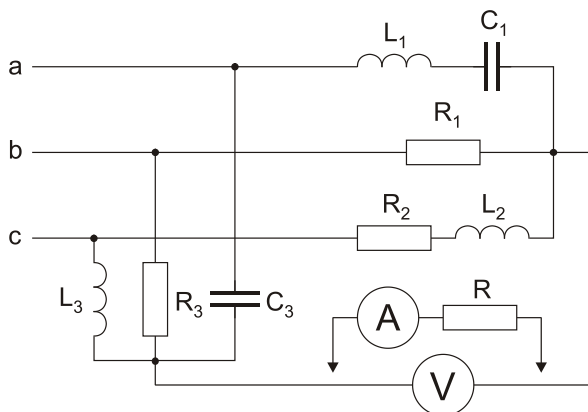
Zadanie 10.7

W obwodzie zasilanym z sieci symetrycznej, jak na rys. 10.7, obliczyć wskazanie woltomierza. Jakie będzie wskazanie amperomierza, jeżeli zostanie on dołączony w pokazany sposób? Ile wówczas wskaże woltomierz?

Dane: $U=380\text{ V}$, $X_{L1}=X_{C1}=20\ \Omega$, $X_{L2}=36\ \Omega$, $R_1=R_3=X_{L3}=X_{C3}=100\ \Omega$, $R_2=64\ \Omega$, $R=10\ \Omega$.



Rys. 10.6



Rys. 10.7

Zadanie 10.8

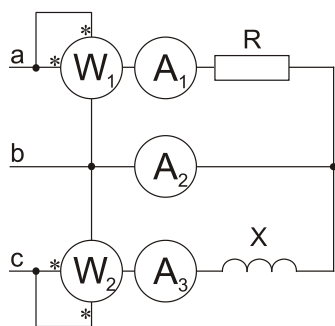
W obwodzie przedstawionym na rys. 10.8 obliczyć wskazania mierników oraz całkowitą moc czynną, bierną i pozorną układu.

Dane: $R=100\ \Omega$, $X=200\ \Omega$, zasilanie symetryczne $U=400\text{ V}$.

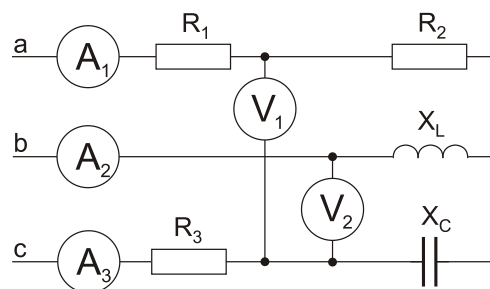
Zadanie 10.9

W obwodzie przedstawionym na rys. 10.9 obliczyć wskazania mierników.

Dane: $R_1=80\ \Omega$, $R_2=120\ \Omega$, $R_3=60\ \Omega$, $X_L=200\ \Omega$, $X_C=190,8\ \Omega$, zasilanie symetryczne $U=400\text{ V}$.



Rys. 10.8



Rys. 10.9

Zadanie 10.10

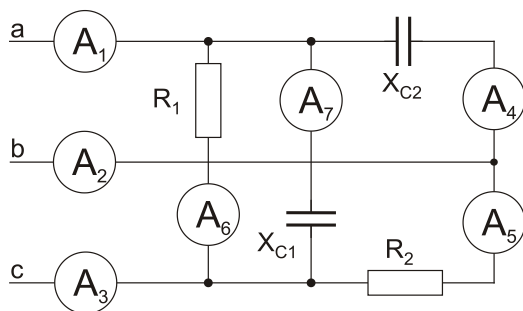
W obwodzie przedstawionym na rys. 10.10 obliczyć wskazania amperomierzy.

Dane: $R_1=200\ \Omega$, $R_2=300\ \Omega$, $X_{C1}=500\ \Omega$, $X_{C2}=400\ \Omega$, zasilanie symetryczne $U=400\text{ V}$.

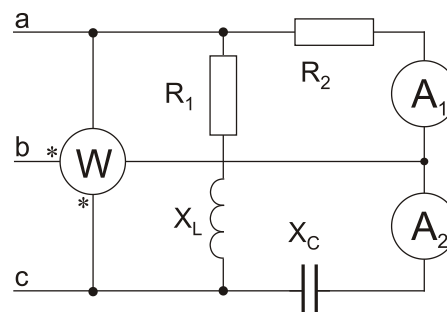
Zadanie 10.11

W obwodzie przedstawionym na rys. 10.11 obliczyć wskazania mierników.

Dane: $R_1=80\ \Omega$, $R_2=100\ \Omega$, $X_L=60\ \Omega$, $X_C=150\ \Omega$, zasilanie symetryczne $U=220\text{ V}$.



Rys. 10.10



Rys. 10.11

Zadanie 10.12

Na skutek błędnego połączenia uzwojenia wtórnego transformatora nastąpiła niesymetria napięć zasilających trójfazowy odbiornik symetryczny połączony w trójkąt – rys. 10.12. Dane są prądy I_a , I_b , I_c w linii zasilającej. Obliczyć prądy I_{ab} , I_{bc} , I_{ca} w fazach odbiornika.

Dane: $I_a=7,5\text{ A}$, $I_b=10,2\text{ A}$, $I_c=15,7\text{ A}$.

Zadanie 10.13

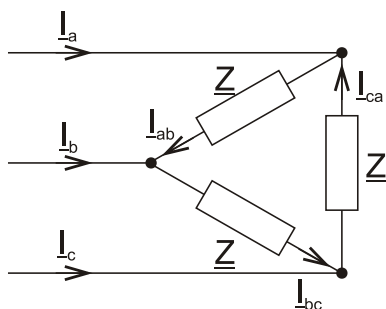
W uzwojeniu trójfazowego odbiornika symetrycznego (rys. 10.13) nastąpiło zwarcie. Obliczyć prądy I_a , I_b , I_c w linii zasilającej przed i po wystąpieniu zwarcia oraz prąd zwarcia I_z .

Dane: zasilanie symetryczne $U=380\text{ V}$, $X=60\ \Omega$.

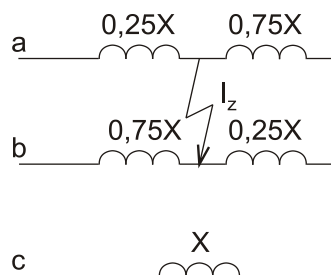
Zadanie 10.14

W uzwojeniu trójfazowego odbiornika symetrycznego połączonych w trójkąt (rys. 10.14) nastąpiło zwarcie. Obliczyć prądy poszczególnych sekcji uzwojenia oraz prądy pobierane ze źródła.

Dane: zasilanie symetryczne $U=400\text{ V}$, $X=36\ \Omega$.



Rys. 10.12



Rys. 10.13

Zadanie 10.15

Trzy odbiorniki jednofazowe połączono w gwiazdę i zasilono z symetrycznej sieci trójfazowej czteroprzewodowej – rys. 10.15. Obliczyć napięcia, prądy i moce pobierane przez odbiorniki po przerwaniu przewodu neutralnego.

Dane: zasilanie symetryczne 400/230 V

Dane znamionowe:

Odb₁: $P_{1n}=300$ W, $U_{1n}=230$ V, $\cos\varphi_{1n}=0,86$

Odb₂: $P_{2n}=1,2$ kW,

$U_{2n}=230$ V,

$\cos\varphi_{2n}=0,8$

Odb₃: $P_{3n}=3,6$ kW,

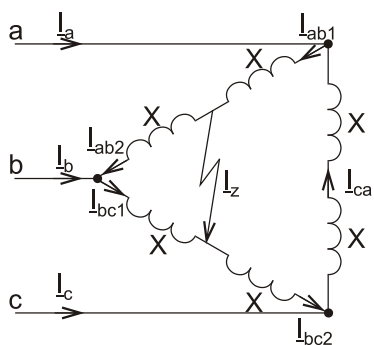
$U_{3n}=230$ V,

$\cos\varphi_{3n}=0,74$

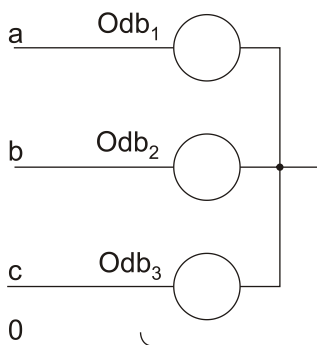
Zadanie 10.16

Wskutek uszkodzenia impedancja jednej fazy odbiornika trójfazowego symetrycznego, połączony w trójkąt (rys. 10.16), zmniejszyła się dwukrotnie. Obliczyć moc czynną i bierną pobieraną przez odbiornik oraz prądy fazowe odbiornika i przewodowe przed i po wystąpieniu uszkodzenia.

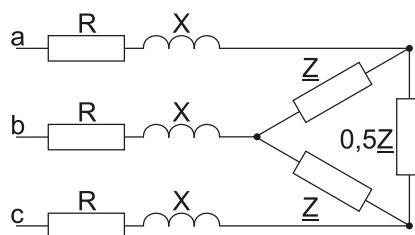
Dane: $R=3$ Ω , $X=4$ Ω , $\underline{Z}=30+j21$ Ω , zasilanie symetryczne $U=380$ V.



Rys. 10.14



Rys. 10.15



Rys. 10.16

Zadanie 10.17

Po zamknięciu łącznika trójbiegunowego w linii zasilającej odbiornik trójfazowy (rys. 10.17), styki łącznika w fazie A i C zamknęły się, a w fazie B na skutek uszkodzenia pozostały otwarte. Obliczyć wartości zespolone prądów przewodowych i fazowych odbiornika w tej sytuacji oraz w wypadku zamknięcia styków we wszystkich fazach.

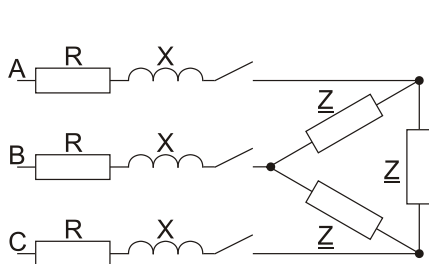
Dane: $R=1,2$ Ω , $X=2,5$ Ω , $\underline{Z}=14,1+j10,2$ Ω ,

zasilanie symetryczne $U=220$ V.

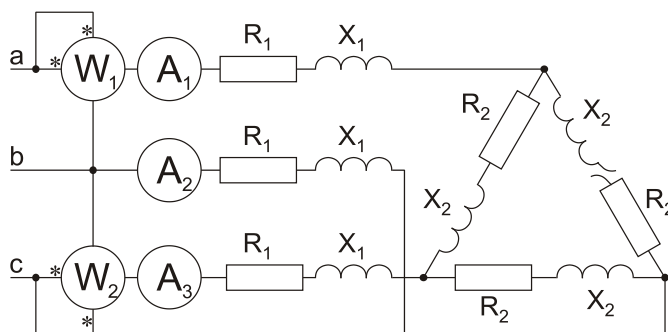
Zadanie 10.18

W układzie przedstawionym na rys. 10.18 obliczyć wskazania przyrządów pomiarowych przed i po wystąpieniu przerwy w fazie ab odbiornika.

Dane: $R_1=1\ \Omega$, $X_1=2\ \Omega$, $R_2=18\ \Omega$, $X_2=9\ \Omega$, zasilanie symetryczne $3\times 380\text{ V}$.



Rys. 10.17

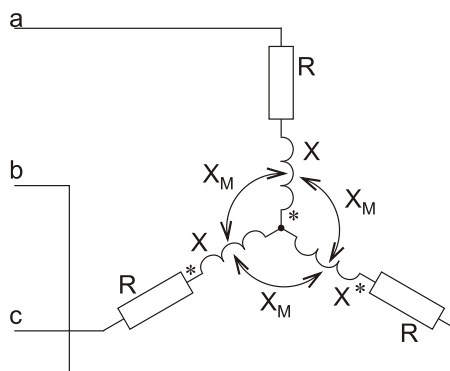


Rys. 10.18

Zadanie 10.19

W uzwojeniu trójfazowego odbiornika symetrycznego zamieniono końcówki jednego uzwojenia, dzięki czemu powstał układ jak na rys. 10.19. Obliczyć wartości i przesunięcia fazowe prądów we wszystkich fazach układu. Przyjąć zerową fazę początkową napięcia zasilającego w fazie a.

Dane: $R=5\ \Omega$, $X=30\ \Omega$, $X_M=28\ \Omega$, zasilanie symetryczne $U=380\text{ V}$.



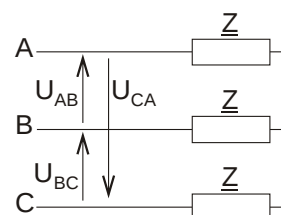
Rys. 10.19

METODA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH**Zadanie 10.20**

Trójfazowy odbiornik symetryczny jest zasilany niesymetrycznym układem napięć przewodowych – rys. 10.20. Dane są wartości skuteczne napięć zasilających. Obliczyć prądy fazowe odbiornika stosując metodę składowych symetrycznych.

Dane: $U_{AB}=110\text{ V}$, $U_{BC}=144\text{ V}$, $U_{CA}=127\text{ V}$,

$\underline{Z}=8+j6\ \Omega$.

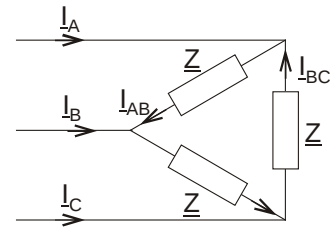


Rys. 10.20

Zadanie 10.21

Na skutek błędnego połączenia uzwojenia wtórnego transformatora nastąpiła niesymetria napięć zasilających trójfazowy odbiornik symetryczny połączony w trójkąt – rys. 10.21. Dane są prądy $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$ w linii zasilającej. Obliczyć prądy $\underline{I}_{AB}$, $\underline{I}_{BC}$, $\underline{I}_{CA}$ odbiornika metodą składowych symetrycznych.

Dane: $\underline{I}_A = 7,5e^{-j58^\circ}$ A, $\underline{I}_B = 10,2e^{-j113^\circ}$ A.



Rys. 10.21

Zadanie 10.22

Trzy jednakowe rezystancje $R=10 \Omega$, połączone w gwiazdę bez przewodu neutralnego, zasilane są niesymetrycznym układem trójfazowym napięć. Obliczyć prądy przewodowe, wykorzystując metodę składowych symetrycznych.

Dane: $U_{AB}=200$ V, $U_{BC}=141$ V, $U_{CA}=141$ V.

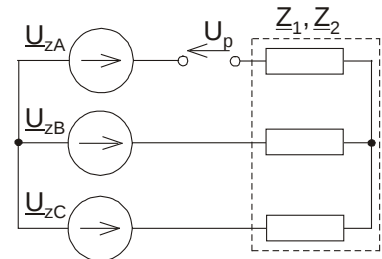
Zadanie 10.23

Silnik trójfazowy jest zasilany napięciem 380/220V. Obliczyć prądy w fazach B i C, jeżeli w fazie A nastąpiła przerwa – rys. 10.23. Obliczyć także napięcie U_p występujące na przerwie.

Dane: impedancje dla składowych symetrycznych:

zgodnej: $\underline{Z}_1 = (4+j3) \Omega$,

przeciwnej: $\underline{Z}_2 = (0,15+j0,4) \Omega$.

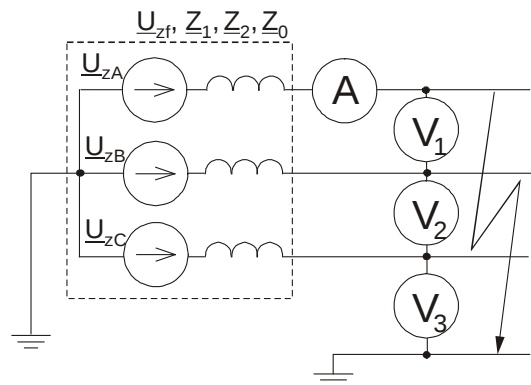


Rys. 10.23

Zadanie 10.24

Faza A symetrycznej prądnicy trójfazowej z uziemionym punktem neutralnym została zwarta z ziemią, jak pokazano na rys. 10.24. Obliczyć wskazania amperomierza i watomierzy. W obliczeniach przyjąć impedancję ziemi równą zero.

Dane: $U_{zf}=240$ V, $\underline{Z}_1=j9 \Omega$, $\underline{Z}_2=j2 \Omega$, $\underline{Z}_0=j1 \Omega$.

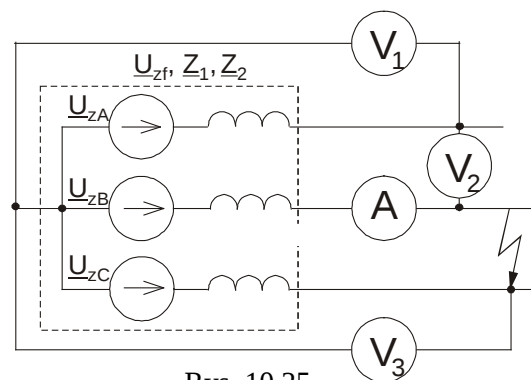


Rys. 10.24

Zadanie 10.25

Na zaciskach symetrycznej prądnicy trójfazowej nastąpiło zwarcie faz B i C. Obliczyć wskazania przyrządów włączonych, jak pokazano na rys. 10.25.

Dane: $U_{zf}=240$ V, $\underline{Z}_1=j8 \Omega$, $\underline{Z}_2=j4 \Omega$.

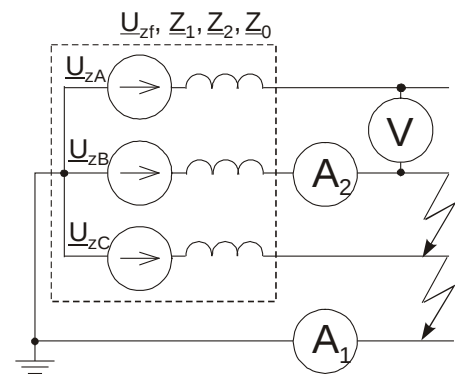


Rys. 10.25

Zadanie 10.26

Na zaciskach symetrycznej prądnicy trójfazowej nastąpiło zwarcie faz B i C ze sobą i do ziemi. Obliczyć wskazania przyrządów włączonych, jak na rys. 10.26.

Dane: $U_{zf}=240\text{ V}$, $\underline{Z}_1=j1,2\ \Omega$, $\underline{Z}_2=j0,4\ \Omega$, $\underline{Z}_0=j0,2\ \Omega$.



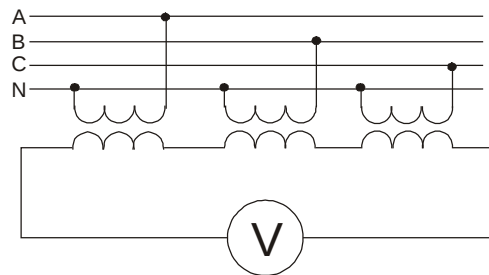
Rys. 10.26

Zadanie 10.27

Napięcie przewodowe na odbiorniku połączonym w gwiazdę wynoszą $U_{AB}=U_{CA}=365\text{ V}$, $U_{BC}=312\text{ V}$. Impedancje odbiornika dla napięć kolejności zgodnej wynoszą $\underline{Z}_1=(3,6+j3,6)\ \Omega$, a dla kolejności przeciwnej $\underline{Z}_2=(0,15+j0,5)\ \Omega$. Wyznaczyć prądy przewodowe w linii zasilającej ten odbiornik.

Zadanie 10.28

W układzie przedstawionym na rys. 10.27 woltomierz wskazuje 3 V . Obliczyć składową symetryczną zerową układu napięć fazowych, jeżeli przekładnia przekładników napięciowych wynosi $6000\text{V}/100\text{V}$.



Rys. 10.28

Zadanie 10.29

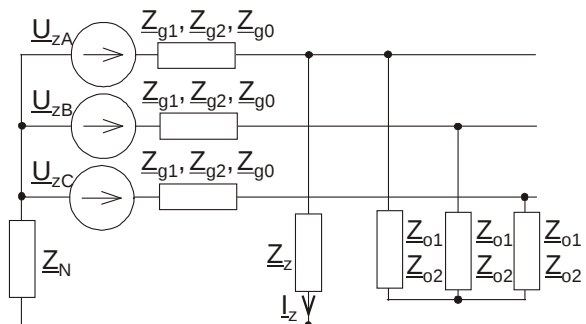
Silnik indukcyjny, połączony w gwiazdę o impedancji fazowej dla składowej zgodnej $\underline{Z}_1$ oraz dla składowej symetrycznej przeciwnej $\underline{Z}_2$, zasilany jest napięciami przewodowymi niesymetrycznymi o wartościach U_1, U_2, U_3 . Obliczyć prądy w poszczególnych fazach silnika.

Dane: $\underline{Z}_1=3+j1\ \Omega$, $\underline{Z}_2=0,1+j0,3\ \Omega$, $U_1=390\text{ V}$, $U_2=390\text{ V}$, $U_3=370\text{ V}$.

Zadanie 10.30

W trójfazowym układzie symetrycznym, jak na rys. 10.30, wystąpiło zwarcie fazy A z ziemią przez impedancję $\underline{Z}_z$. Stosując metodę składowych symetrycznych, obliczyć prąd I_z w miejscu zwarcia i prąd I_a w fazie źródła.

Dane: $\underline{Z}_{g1}=j9\ \Omega$, $\underline{Z}_{g2}=j2\ \Omega$, $\underline{Z}_{g0}=j1\ \Omega$,
 $\underline{Z}_z=(1+j0,5)\ \Omega$, $\underline{Z}_N=j0,5\ \Omega$, $\underline{Z}_{o2}=(4+j3)\ \Omega$,
 $\underline{Z}_{o2}=(0,2+j0,4)\ \Omega$,
 $U_{zA}=U_{zB}=U_{zC}=240\text{ V}$.

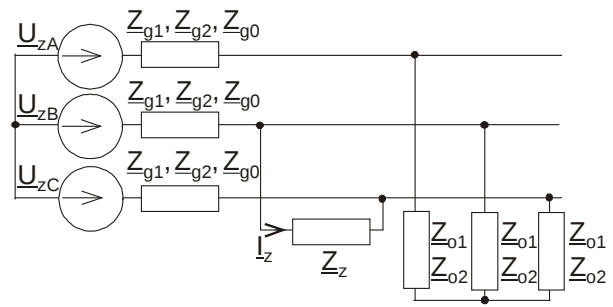


Rys. 10.30

Zadanie 10.31

W trójfazowym układzie symetrycznym, jak na rys. 10.31, wystąpiło zwarcie faz B i C przez impedancję $\underline{Z}_z$. Stosując metodę składowych symetrycznych, obliczyć prąd $\underline{I}_z$ w miejscu zwarcia.

Dane: $\underline{Z}_{g1}=j9\ \Omega$, $\underline{Z}_{g2}=j2\ \Omega$, $\underline{Z}_{g0}=j1\ \Omega$,
 $\underline{Z}_{o1}=(4+j3)\ \Omega$, $\underline{Z}_{o2}=(0,2+j0,4)\ \Omega$,
 $\underline{Z}_z=(1+j0,5)\ \Omega$,
 $U_{zA}=U_{zB}=U_{zC}=240\ \text{V}$.



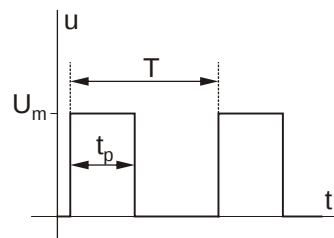
Rys. 10.31

III. PRZEBIEGI OKRESOWO ZMIENNE

11. WARTOŚCI ŚREDNIE I SKUTECZNE PRZEBIEGÓW OKRESOWYCH

Zadanie 11.1

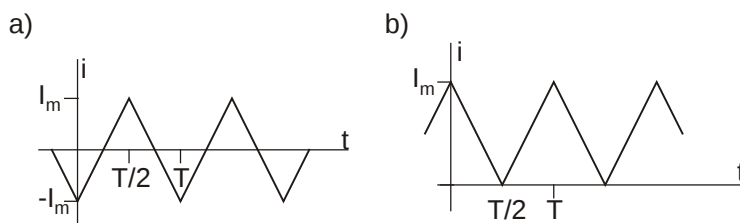
Obliczyć wartość średnią i skuteczną napięcia $u(t)$ o przebiegu prostokątnym, pokazanym na rys. 11.1, jako funkcję współczynnika wypełnienia $\delta = t_p/T$, przy $T = \text{const}$.



Rys. 11.1

Zadanie 11.2

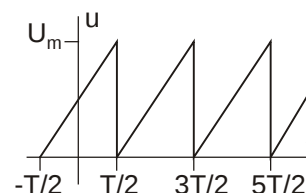
Obliczyć wartości średnie i skuteczne prądów o przebiegu trójkątnym, przedstawionych na rys. 11.2.



Rys. 11.2

Zadanie 11.3

Obliczyć wartość średnią i skuteczną napięcia piłokształtnego, o przebiegu jak na rys. 11.3.

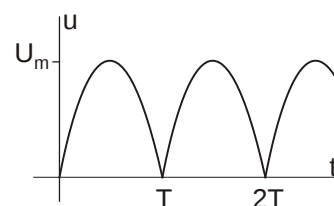


Rys. 11.3

Zadanie 11.4

Obliczyć wartość średnią i skuteczną przebiegu napięcia przedstawionego na rys. 11.4. Obliczenia wykonać przyjmując, że jeden okres przebiegu jest aproksymowany: a) funkcją sinusoidalną, b) funkcją kwadratową, przy założeniu, że węzłami interpolacji są punkty: $t=0$, $t=0,5 T$, $t=T$.

Dane: $U_m = 100 \text{ V}$.

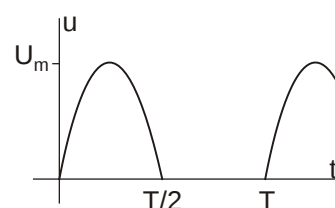


Rys. 11.4

Zadanie 11.5

Obliczyć wartość średnią i skuteczną przebiegu napięcia przedstawionego na rys. 11.5. Obliczenia wykonać przyjmując, że niezerowy półokres przebiegu jest aproksymowany: a) funkcją sinusoidalną, b) funkcją kwadratową, przy założeniu, że węzłami interpolacji są punkty: $t=0$, $t=0,25 T$, $t=0,5 T$.

Dane: $U_m = 100 \text{ V}$, $T = 20 \text{ ms}$.

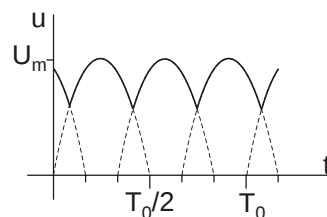


Rys. 11.5

Zadanie 11.6

Obliczyć wartość średnią i skuteczną napięcia na zaciskach prostownika trójfazowego trójpulsowego - rys. 11.6. Przebieg tego napięcia składa się z fragmentów sinusoid o tej samej częstotliwości i amplitudzie, przesuniętych w fazie o $1/3$ okresu.

Dane: $U_m=100$ V, $T_0=20$ ms.

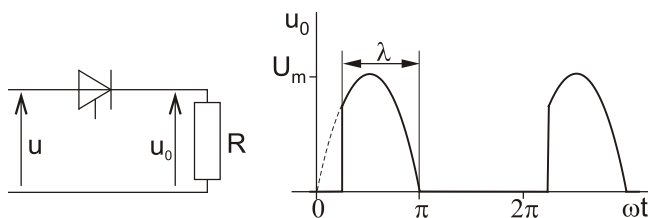


Rys. 11.6

Zadanie 11.7

Obliczyć i narysować funkcję określającą wartość średnią napięcia $u_0(t)$ na zaciskach wyjściowych prostownika sterowanego półokresowego – rys. 11.7, w funkcji kąta przewodzenia tyrystora λ zmieniającego się w granicach od 0 do π .

Dane: $u(t)=U_m \sin(\omega t)$

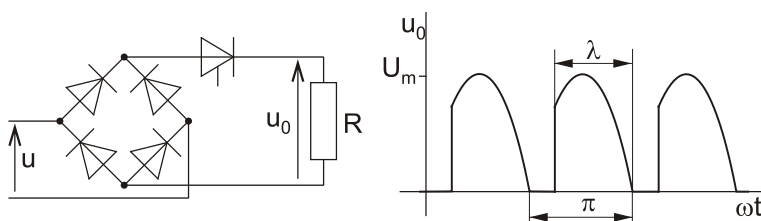


Rys. 11.7

Zadanie 11.8

Obliczyć i narysować funkcję określającą wartość średnią napięcia $u_0(t)$ na zaciskach wyjściowych prostownika sterowanego pełnookresowego – rys. 11.8, w funkcji kąta przewodzenia tyrystora λ zmieniającego się w granicach od 0 do π .

Dane: $u(t)=U_m \sin(\omega t)$



Rys. 11.8

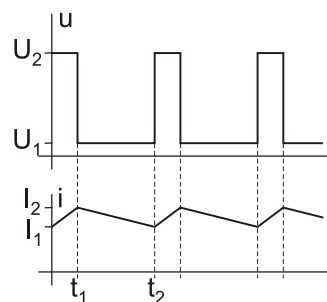
Zadanie 11.9

Na rys. 11.9 przedstawiono przebiegi napięcia i prądu odbiornika. Obliczyć wartości skuteczne tych wielkości i moc czynną odbiornika.

Dane: $U_1=9$ V, $U_2=110$ V,

$I_1=9$ A, $I_2=11$ A,

$t_1=1$ ms, $t_2=4$ ms.

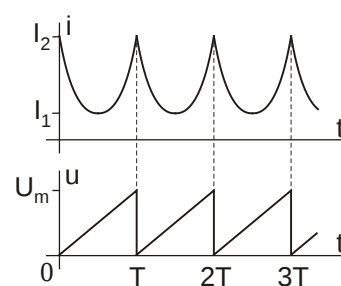


Rys. 11.9

Zadanie 11.10

Na rys. 11.10 przedstawiono przebiegi napięcia i prądu odbiornika. Obliczyć wartości skuteczne tych wielkości i moc czynną odbiornika. Przyjąć, że prąd w ciągu jednego okresu zmienia się parabolicznie.

Dane: $I_1=1,8\text{ A}$, $I_2=2,4\text{ A}$,
 $U_m=100\text{ V}$, $T=1\text{ ms}$.



Rys. 11.10

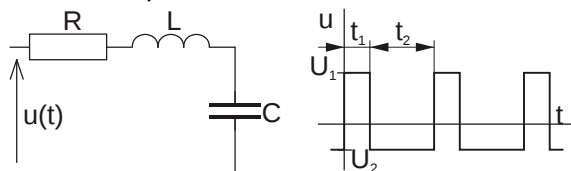
12. ANALIZA HARMONICZNA

Zadanie 12.1

Przedstawiony na rys. 12.1 obwód jest zasilany napięciem prostokątnym. Obliczyć wartość chwilową i skuteczną prądu oraz moc czynną, bierną, pozorną i moc odkształcenia pobieraną ze źródła. Wziąć pod uwagę rozwinięcie w szereg Fouriera do szóstej harmonicznej.

Dane: $U_1=24\text{ V}$, $U_2=-6\text{ V}$, $t_1=1,1\text{ ms}$, $t_2=3,3\text{ ms}$,

$R=5\ \Omega$, $L=3,4\text{ mH}$, $C=40\ \mu\text{F}$.

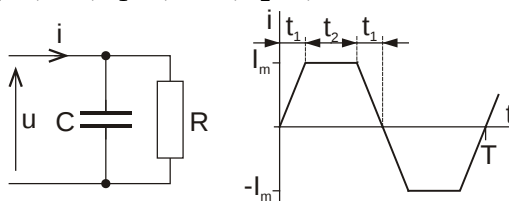


Rys. 12.1

Zadanie 12.2

Przedstawiony na rys. 12.2 obwód jest zasilany prądem o przebiegu trapezowym. Obliczyć wartość skuteczną napięcia źródła oraz moc czynną i bierną obwodu, biorąc pod uwagę 3 pierwsze niezerowe harmoniczne prądu zasilającego.

Dane: $R=120\ \Omega$, $C=10\ \mu\text{F}$, $I_m=0,2\text{ A}$, $t_1=1,2\text{ ms}$, $t_2=4,6\text{ ms}$.

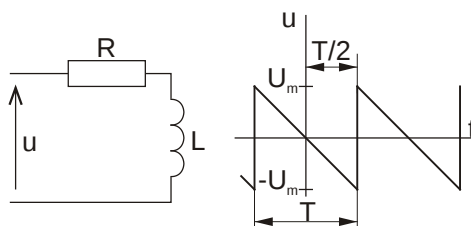


Rys. 12.2

Zadanie 12.3

Przedstawiony na rys. 12.3 obwód jest zasilany napięciem o przebiegu piłokształtnym. Obliczyć wartość skuteczną prądu zasilającego oraz moc czynną i bierną obwodu. Obliczenia wykonać uwzględniając 3 pierwsze harmoniczne napięcia zasilającego.

Dane: $R=25\ \Omega$, $L=25\text{ mH}$, $U_m=5\text{ V}$, $T=5\text{ ms}$.

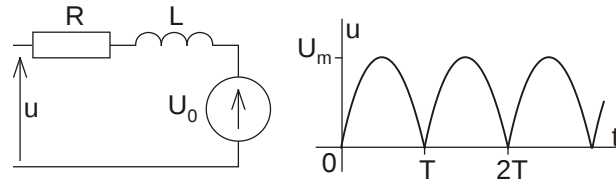


Rys. 12.3

Zadanie 12.4

Przedstawiony na rys. 12.4 obwód, zasilany napięciem sinusoidalnym wyprostowanym dwupołówkowo, zawiera źródło napięcia stałego U_0 . Obliczyć wartość skuteczną prądu oraz moc czynną, bierną i pozorną pobieraną ze źródła napięcia sinusoidalnego. Wziąć pod uwagę 4 pierwsze wyrazy rozwinięcia w szereg Fouriera.

Dane: $R=5\ \Omega$, $L=20\text{ mH}$, $U_0=150\text{ V}$, $U_m=310\text{ V}$, $T=10\text{ ms}$.

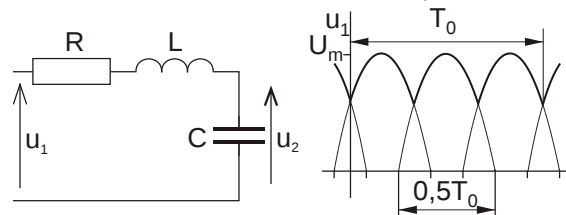


Rys. 12.4

Zadanie 12.5

Przedstawiony na rys. 12.5 obwód jest zasilany napięciem pobieranym z trójfazowego prostownika trójpulsowego. Przebieg tego napięcia składa się z odcinków trzech sinusoid o tej samej częstotliwości i amplitudzie, przesuniętych w fazie o $1/3$ okresu. Obliczyć wartość chwilową i skuteczną napięcia na pojemności oraz wartość skuteczną napięcia u_1 . Wziąć pod uwagę 4 pierwsze wyrazy rozwinięcia w szereg Fouriera napięcia zasilającego.

Dane: $U_m=155$ V, $T_0=20$ ms, $R=45$ Ω , $L=100$ mH, $C=100$ μ F.

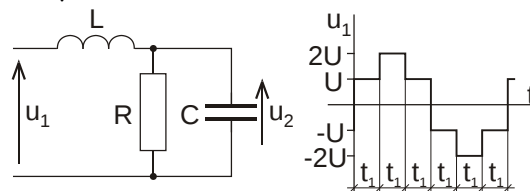


Rys. 12.5

Zadanie 12.6

Przedstawiony na rys. 12.6 obwód jest zasilany napięciem o przebiegu schodkowym. Obliczyć wartość skuteczną napięcia zasilającego oraz wartość chwilową i skuteczną napięcia na pojemności. Rozwinąć napięcie zasilające w szereg Fouriera do siódmej harmonicznej.

Dane: $R=50$ Ω , $L=50$ mH, $C=20$ μ F, $U=5$ V, $t_1=1$ ms.

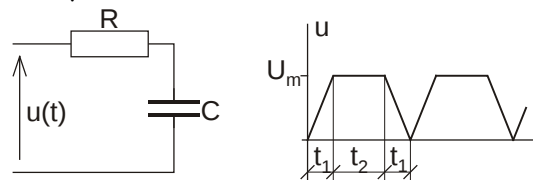


Rys. 12.6

Zadanie 12.7

W obwodzie przedstawionym na rys. 12.7 napięcie zasilające ma przebieg trapezowy. Obliczyć wartość skuteczną prądu pobieranego ze źródła i napięcia na pojemności oraz moc czynną i bierną obwodu. Wykorzystać rozwinięcie napięcia zasilającego w szereg Fouriera do czwartej harmonicznej.

Dane: $R=90$ Ω , $C=20$ μ F, $t_1=400$ μ s, $t_2=1,2$ ms, $U_m=20$ V.

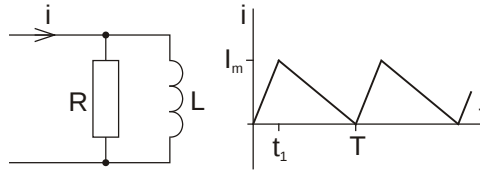


Rys. 12.7

Zadanie 12.8

W obwodzie, jak na rys. 12.8, obliczyć wartość skuteczną napięcia oraz moc czynną, bierną i pozorną źródła. Uwzględnić 4 pierwsze niezerowe wyrazy rozwinięcia prądu zasilającego w szereg Fouriera.

Dane: $R=100\ \Omega$, $L=2\ \text{mH}$, $C=10\ \mu\text{F}$, $U_m=30\ \text{V}$, $T=9\ \text{ms}$, $t_1=3\ \text{ms}$.

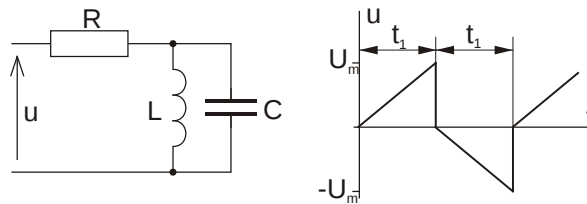


Rys. 12.8

Zadanie 12.9

Przedstawiony na rys. 12.9 obwód jest zasilany napięciem piłokształtnym przemiennym. Obliczyć wartość skuteczną prądu pobieranego ze źródła i moc czynną wydzielaną w obwodzie. Wykorzystać rozwinięcie w szereg Fouriera do piątej harmonicznej.

Dane: $R=45\ \Omega$, $L=10\ \text{mH}$, $C=10\ \mu\text{F}$, $U_m=15\ \text{V}$, $t_1=800\ \mu\text{s}$.

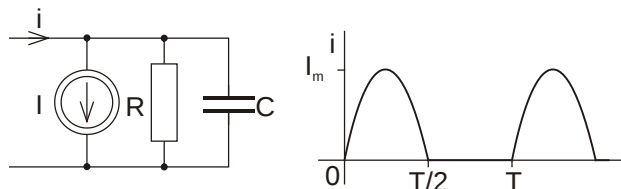


Rys. 12.9

Zadanie 12.10

Przedstawiony na rys. 12.10 obwód, zasilany prądem sinusoidalnym wyprostowanym jednopółkowo, zawiera źródło prądu stałego I . Obliczyć wartość skuteczną napięcia oraz moc czynną, bierną i pozorną pobieraną ze źródła prądu sinusoidalnego. Rozwinąć prąd zasilający w szereg Fouriera do czwartej harmonicznej.

Dane: $R=10\ \Omega$, $C=300\ \mu\text{F}$, $I=1\ \text{A}$, $I_m=10\ \text{A}$, $T=20\ \text{ms}$.



Rys. 12.10

IV. UKŁADY AKTYWNE

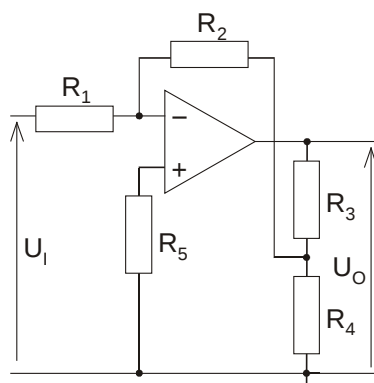
13. OBWODY ZE WZMACNIACZAMI OPERACYJNYMI

Zadanie 13.1

Obliczyć wzmocnienie układu przedstawionego na rys. 13.1, określone jako stosunek napięć-wyjściowego do wejściowego:

$$K = \frac{U_o}{U_i}.$$

Dane: $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=10\text{ k}\Omega$.

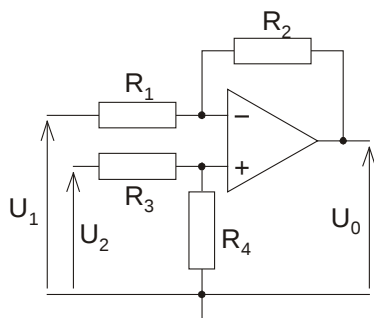


Rys. 13.1

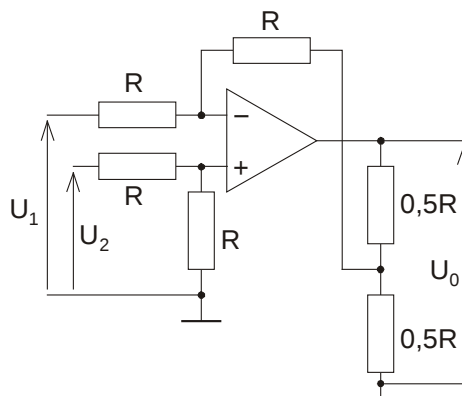
Zadanie 13.2

W przedstawionym układzie wzmacniacza różnicowego (rys. 13.2) dobrać rezystancje R_2 i R_4 , tak aby $U_o=K(U_2-U_1)$.

Dane: $R_1=10\text{ k}\Omega$, $R_3=8\text{ k}\Omega$, $K=2$.



Rys. 13.2

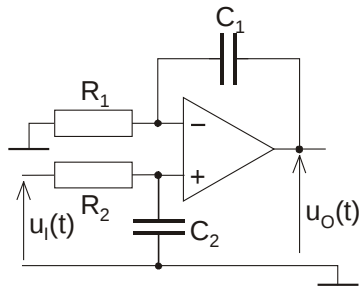


Rys. 13.3

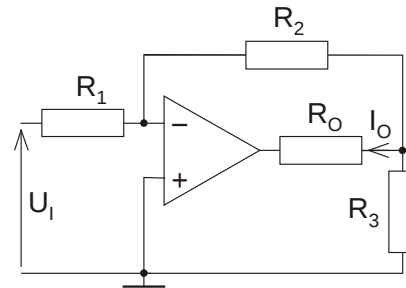
Zadanie 13.4

Wyznaczyć napięcie wyjściowe $u_o(t)$ układu przedstawionego na rys. 13.4 dla $t \geq 0$, przy założeniu że napięcie $u_1(t)$ jest znaną funkcją czasu, a napięcia na kondensatorach w chwili $t=0$ są równe 0.

Dane: $R_1 C_1 = R_2 C_2 = T$.



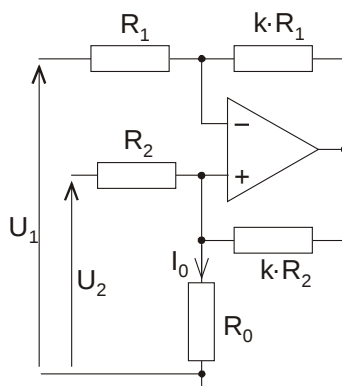
Rys. 13.4



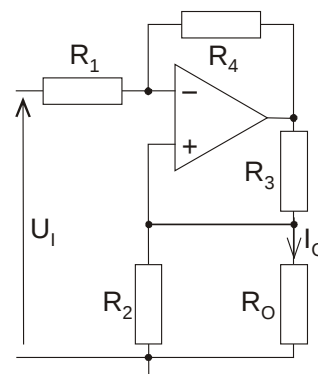
Rys. 13.5

Zadanie 13.6

W przedstawionym na rys. 13.6 układzie Howlanda wyznaczyć funkcję $I_0 = f(U_1, U_2)$.
Dane: U_1, U_2, R_2 .



Rys. 13.6



Rys. 13.7

Zadanie 13.7

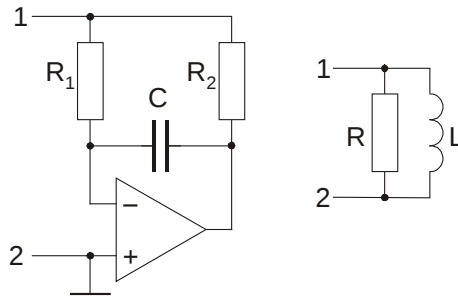
Wyznaczyć funkcję $I_0 = f(U_1)$ w układzie konwertera napięcie-prąd przedstawionym na rys. 13.7. Założyć: $\frac{R_3}{R_2} = \frac{R_4}{R_1}$. Współczynnik k oznacza pewną stałą.

Dane: R_2 .

Zadanie 13.8

Wykazać równoważność układów przedstawionych na rys. 13.8. Obliczyć indukcyjność L i rezystancję R .

Dane: R_1, R_2, C

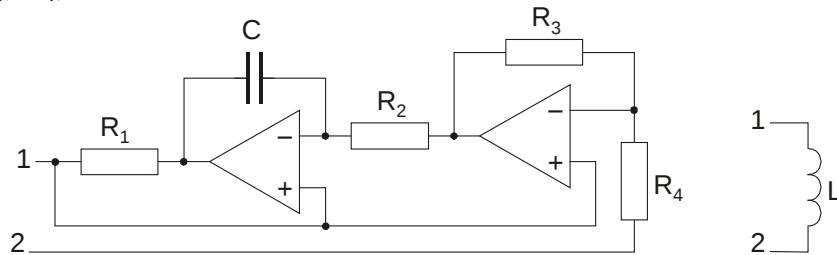


Rys. 13.8

Zadanie 13.9

Wykazać równoważność przedstawionych na rys. 13.9 układów. Obliczyć indukcyjność L .

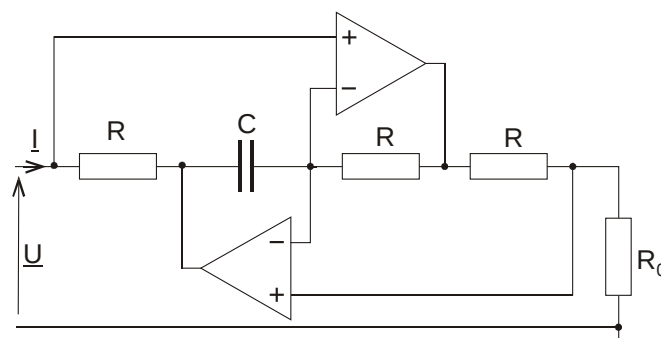
Dane: R_1, R_2, R_3, R_4, C



Rys. 13.9

Zadanie 13.10

Wykazać, że układ przedstawiony na rys. 13.10 zachowuje się jak idealna indukcyjność.



Rys. 13.10

Zadanie 13.11

Obliczyć impedancję wejściową przedstawionego na rys. 13.11 konwertera impedancji, określoną następująco:

$$\underline{Z}_{we} = \frac{U}{I}.$$

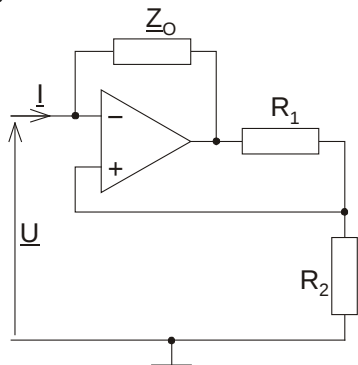
Dane: $R_1, R_2, \underline{Z}_0$.

Zadanie 13.12

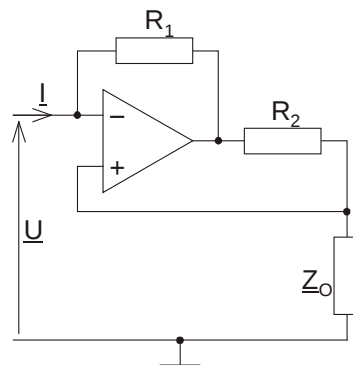
Obliczyć impedancję wejściową przedstawionego na rys. 13.12 konwertera impedancji, określoną następująco:

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}.$$

Dane: R_1 , R_2 , $\underline{Z}_0$.



Rys. 13.11



Rys. 13.12

Zadanie 13.13

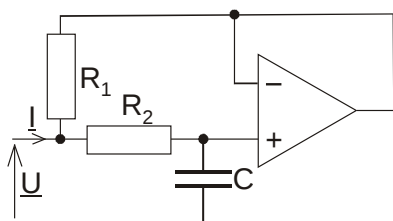
Obwód z idealnym wzmacniaczem operacyjnym zasilany jest napięciem sinusoidalnym o pulsacji $\omega=500 \text{ s}^{-1}$ (rys. 13.13). Obliczyć impedancję wejściową tego obwodu $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$.

Dane: $R_1=10 \text{ k}\Omega$, $R_2=90 \text{ k}\Omega$, $C=22,2 \text{ nF}$.

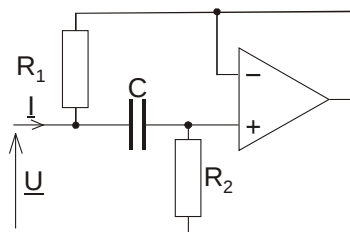
Zadanie 13.14

Obwód przedstawiony na rys. 13.14 zasilany jest napięciem sinusoidalnym o pulsacji $\omega=500 \text{ s}^{-1}$. Obliczyć impedancję wejściową tego obwodu $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$.

Dane: $R_1=10 \text{ k}\Omega$, $R_2=90 \text{ k}\Omega$, $C=22,2 \text{ nF}$.



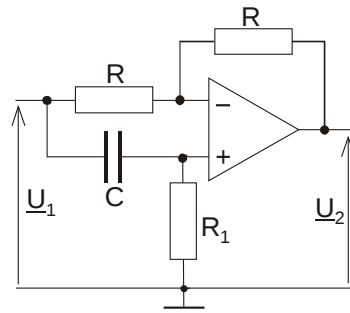
Rys. 13.13



Rys. 13.14

Zadanie 13.15

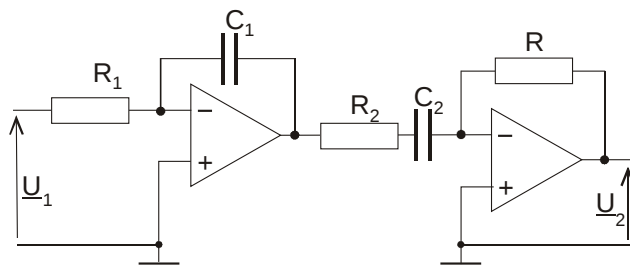
W układzie przedstawionym na rys. 13.15 obliczyć i narysować charakterystykę $\varphi(\omega R_1 C)$ przesunięcia fazowego między napięciami $\underline{U}_1$ i $\underline{U}_2$.



Rys. 13.15

Zadanie 13.16

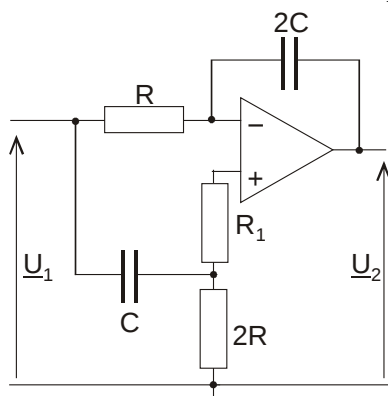
Obliczyć, dla jakiej wartości stałej czasowej R_2C_2 przesunięcie fazowe między $\underline{U}_2$ i $\underline{U}_1$ w obwodzie, jak na rys. 13.16, wynosi $-\pi/4$ dla częstotliwości $f=500$ Hz.



Rys. 13.16

Zadanie 13.17

Wyprowadzić zależność na stosunek napięć $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = f(\omega RC)$ w układzie, jak na rys. 13.17.

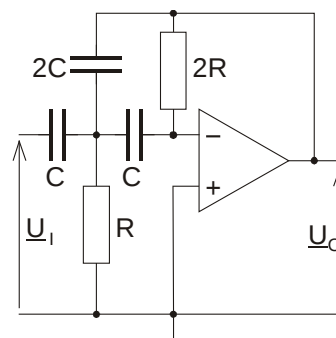


Rys. 13.17

Zadanie 13.18

Obliczyć i narysować charakterystykę amplitudową przedstawionego na rys. 13.18 filtra górnoprzepustowego:

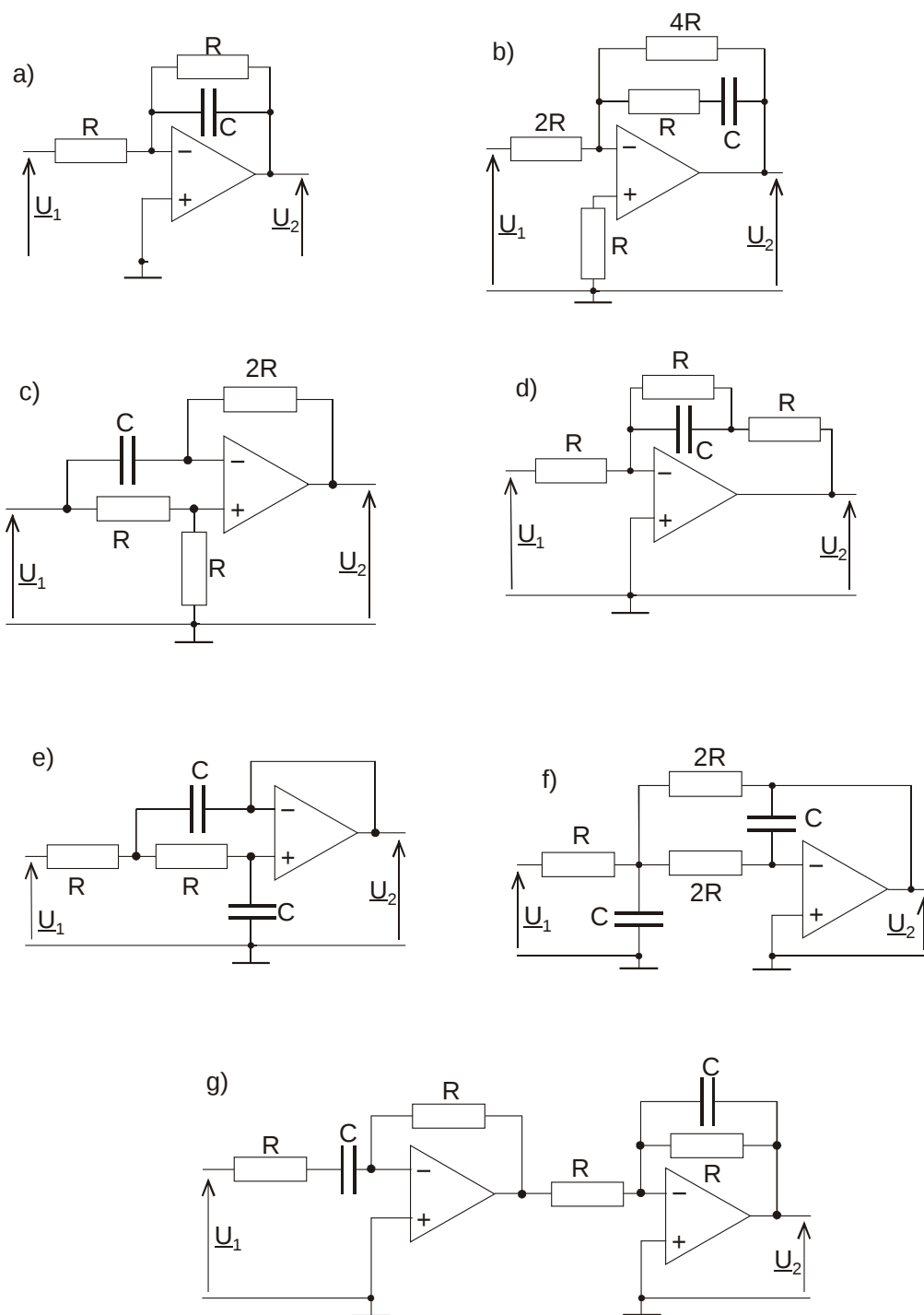
$$\frac{U_O}{U_I} = f(\omega RC).$$



Rys. 13.18

Zadanie 13.19

W przedstawionych na rys. 13.19 układach wyznaczyć charakterystykę $\frac{U_2}{U_1} = f(\omega RC)$.



Rys. 13.19

V. OBWODY NIELINIOWE

14. ROZWIĄZYWANIE OBWODÓW NIELINIOWYCH

Zadanie 14.1

W układzie przedstawionym na rys. 14.1. wyznaczyć punkt pracy oraz rezystancję statyczną i dynamiczną elementu nieliniowego. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$U_N = a \cdot I_N^3 + b \cdot I_N + c$$

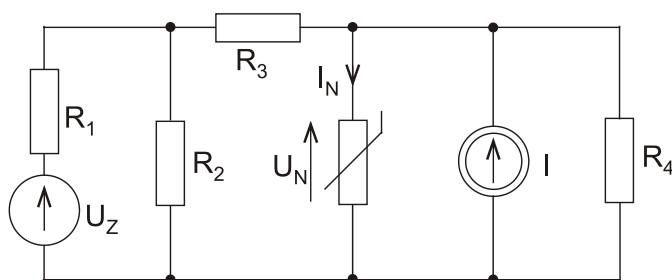
Dane: $a=0,5 \text{ V/A}^3$, $b=4 \text{ V/A}$, $c=2 \text{ V}$, $U_z=40 \text{ V}$, $I=1,2 \text{ A}$, $R_1=10 \Omega$, $R_2=40 \Omega$, $R_3=12 \Omega$, $R_4=80 \Omega$.

Zadanie 14.2

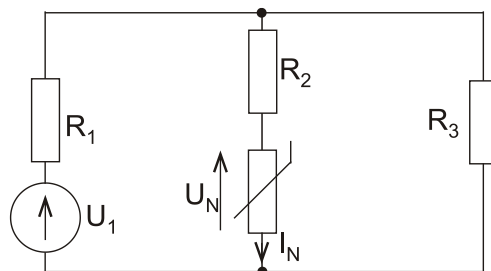
Wyznaczyć punkt pracy oraz rezystancję statyczną i dynamiczną elementu nieliniowego w obwodzie przedstawionym na rys. 14.2. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$I_N = a \cdot U_N^3 + b \cdot U_N$$

Dane: $a=0,0001 \text{ A/V}^3$, $b=0,05 \text{ A/V}$, $U_1=40 \text{ V}$, $R_1=10 \Omega$, $R_2=6 \Omega$, $R_3=90 \Omega$.



Rys. 14.1



Rys. 14.2

Zadanie 14.3

Wyznaczyć punkt pracy, rezystancję statyczną i dynamiczną elementu nieliniowego oraz obliczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rys. 14.3. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$I_N = a \cdot U_N^5 + b \cdot U_N^3 + c \cdot U_N$$

Dane: $a=0,002 \text{ A/V}^5$, $b=0,04 \text{ A/V}^3$, $c=0,1 \text{ A/V}$, $U_1=20 \text{ V}$, $R_1=5 \Omega$, $R_2=10 \Omega$, $R_3=20 \Omega$.

Zadanie 14.4

Obliczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rys. 14.4. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$I_N = a \cdot (1,04^{b \cdot U_N} - 1) + |U_N| \cdot (c \cdot U_N^3 + d \cdot U_N)$$

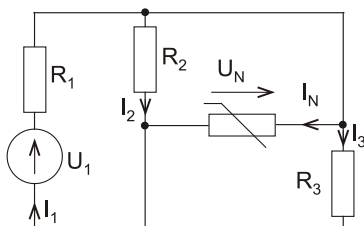
Dane: $a=0,4 \text{ A}$, $b=2 \text{ V}^{-1}$, $c=0,0001 \text{ A/V}^4$, $d=0,02 \text{ A/V}^2$, $U_1=100 \text{ V}$, $R_1=76 \Omega$, $R_2=66 \Omega$, $R_3=60 \Omega$, $R_4=40 \Omega$, $R_5=17 \Omega$, $I_5=0,8 \text{ A}$, $R_6=100 \Omega$.

Zadanie 14.5

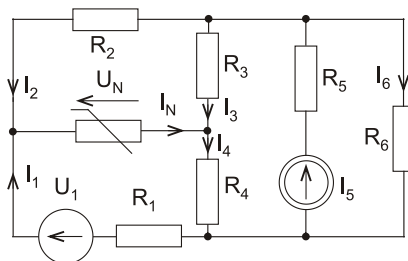
Obliczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rys. 14.5. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$I_N = a \cdot (e^{b \cdot U_N} - 1)$$

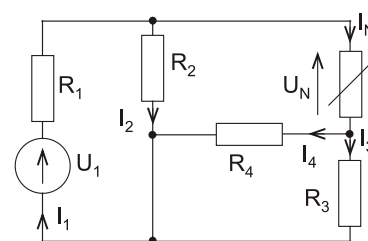
Dane: $a=2 \text{ A}$, $b=0,5 \text{ V}^{-1}$, $U_1=40 \text{ V}$, $R_1=20 \Omega$, $R_2=30 \Omega$, $R_3=40 \Omega$, $R_4=10 \Omega$.



Rys. 14.3



Rys. 14.4



Rys. 14.5

Zadanie 14.6

W układzie przedstawionym na rys. 14.6 wyznaczyć punkt pracy elementu nieliniowego oraz obliczyć prądy pobierane ze źródeł. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$U_N = a \cdot I_N^3 - b \cdot I_N^2 + c \cdot I_N$$

Dane: $a=1 \text{ V/A}^3$, $b=6 \text{ V/A}^2$, $c=12 \text{ V/A}$, $U_1=24 \text{ V}$, $U_2=12 \text{ V}$, $R_1=8 \Omega$, $R_2=24 \Omega$.

Zadanie 14.7

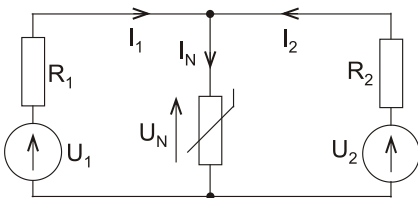
W układzie przedstawionym na rys. 14.7 obliczyć wartość rezystancji R_2 , aby $I=2 \text{ A}$. Dla tak dobranego punktu pracy wyznaczyć parametry zlinearyzowanego schematu zastępczego elementu nieliniowego.

Dane: $R_1=2 \Omega$, $U_z=10 \text{ V}$, $U(I)=\alpha \cdot 2^{\beta I}$, $\alpha=1 \text{ V}$, $\beta=1 \text{ A}^{-1}$.

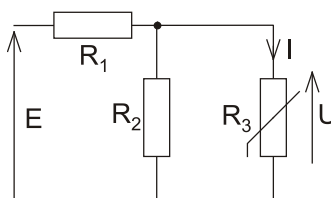
Zadanie 14.8

W układzie przedstawionym na rys. 14.8 określić parametry schematu zastępczego elementu nieliniowego w punkcie pracy.

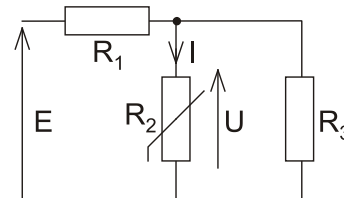
Dane: $U_z=30 \text{ V}$, $R_1=7 \Omega$, $R_3=5 \Omega$, $I(U)=2^{0,25U+1}-2 \text{ [A]}$, $U_2[\text{V}]$.



Rys. 14.6



Rys. 14.7



Rys. 14.8

Zadanie 14.9

W układzie przedstawionym na rys. 14.9 wyznaczyć parametry schematu zastępczego elementu nieliniowego w punkcie pracy.

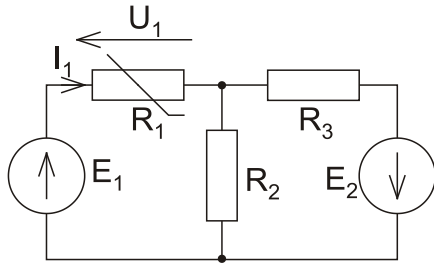
Dane: $U_{Z1}=U_{Z2}=20 \text{ V}$, $R_2=R_3=4 \Omega$, $U_1(I_1)=5I_1^2+3I_1$ dla $I_1 \geq 0$, $U_1(I_1)=-5I_1^2+3I_1$ dla $I_1 < 0$.

Zadanie 14.10

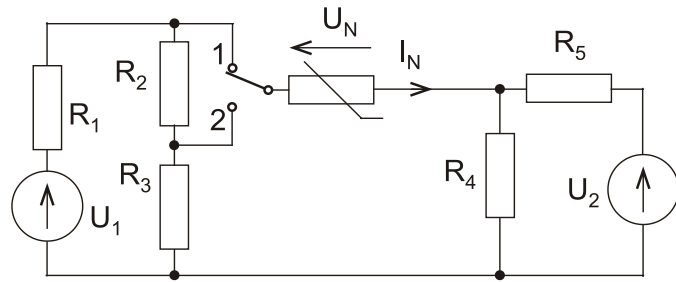
W układzie przedstawionym na rys. 14.10 wyznaczyć punkt pracy elementu nieliniowego przed i po przełączeniu łącznika z pozycji 1 do pozycji 2. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$U_N = \begin{cases} a \cdot I_N^2 + b \cdot I_N & \text{dla } I_N \geq 0 \\ b \cdot I_N & \text{dla } I_N < 0 \end{cases}$$

Dane: $a=3 \text{ V/A}^2$, $b=3 \text{ V/A}$, $U_1=20 \text{ V}$, $U_2=25 \text{ V}$, $R_1=5 \Omega$, $R_2=10 \Omega$, $R_3=5 \Omega$, $R_4=4 \Omega$, $R_5=6 \Omega$.



Rys. 14.9



Rys. 14.10

Zadanie 14.11

W układzie przedstawionym na rys. 14.11 wyznaczyć wartość napięcia U , przy której moc wydzielona w elemencie nieliniowym wynosi P . Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$I_N = a \cdot |U_N| \cdot U_N$$

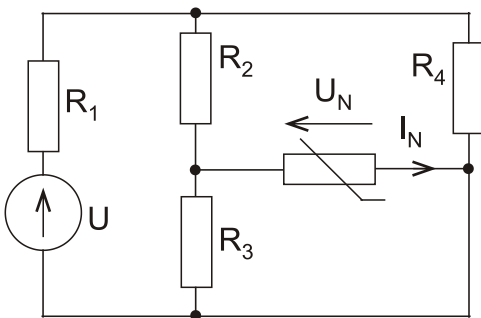
Dane: $a=0,01 \text{ A/V}^2$, $P=10 \text{ W}$, $R_1=R_2=R_3=20 \Omega$, $R_4=10 \Omega$.

Zadanie 14.12

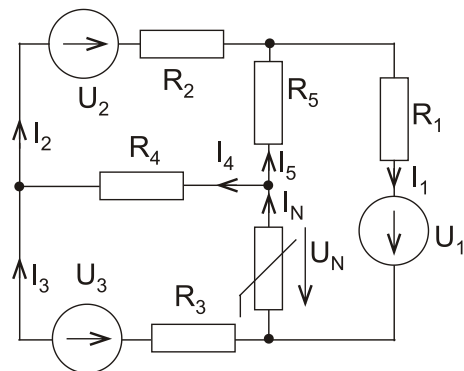
Obliczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rys. 14.12 i sporządzić bilans mocy. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$U_N = a \cdot I_N^2 + b \cdot I_N$$

Dane: $a=3 \text{ V/A}^2$, $b=5 \text{ V/A}$, $U_1=15 \text{ V}$, $U_2=20 \text{ V}$, $U_3=5 \text{ V}$, $R_1=R_3=R_4=R_5=10 \Omega$, $R_2=20 \Omega$.



Rys. 14.11



Rys. 14.12

Zadanie 14.13

Podać schematy zastępcze zlinearyzowane dla diody Zenera o charakterystyce napięciowo-prądowej przedstawionej na rys. 14.13.

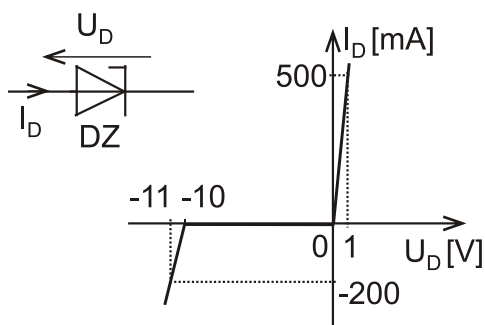
Zadanie 14.14

Obliczyć parametry schematu zastępczego U_d i R_d elementu nieliniowego przedstawionego na rys. 14.14 o charakterystyce napięciowo-prądowej wyrażonej zależnością:

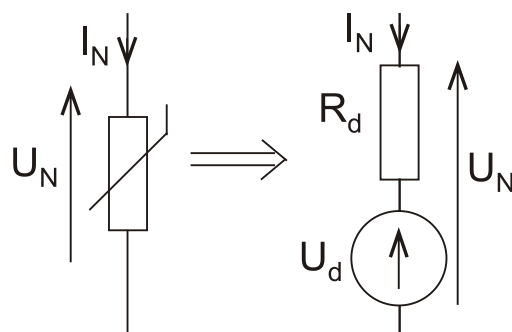
$$I_N = \frac{a \cdot U_N}{U_N + b}$$

jeżeli napięcie punktu pracy wynosi $U_N=3 \text{ V}$.

Dane: $a=0,2 \text{ A}$, $b=1 \text{ V}$.



Rys. 14.13

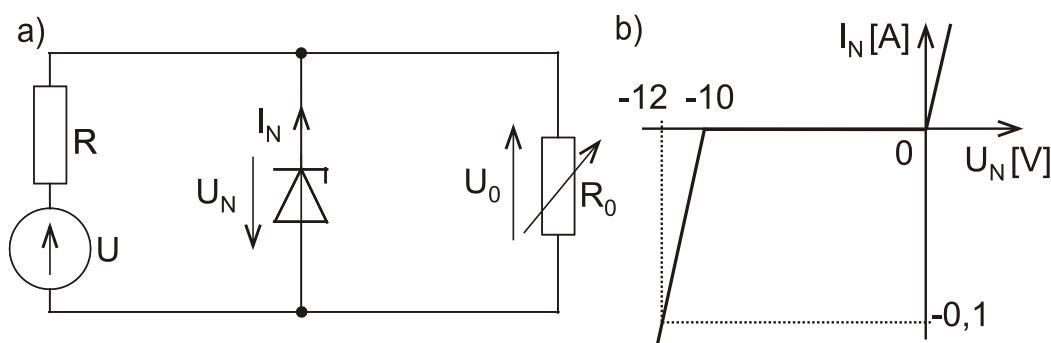


Rys. 14.14

Zadanie 14.15

W układzie przedstawionym na rys. 14.15a wyznaczyć zakres wartości R_0 , dla którego napięcie U_0 zawiera się w granicach: $8 \text{ V} \leq U_0 \leq 12 \text{ V}$. Charakterystyka napięciowo-prądowa diody Zenera jest przedstawiona na rys. 14.15b.

Dane: $U=24 \text{ V}$, $R=100 \Omega$.

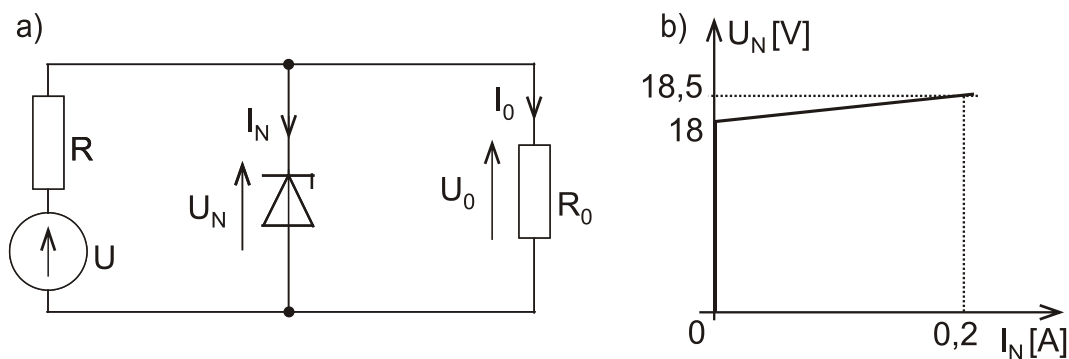


Rys. 14.15

Zadanie 14.16

W układzie przedstawionym na rys. 14.16a wyznaczyć napięcie na rezystancji R_0 oraz moc rozpraszaną w diodzie Zenera dla dwóch wartości napięcia zasilania: a) $U=30 \text{ V}$, b) $U=20 \text{ V}$. Charakterystyka napięciowo-prądowa diody Zenera jest przedstawiona na rys. 14.16b.

Dane: $R=24 \Omega$, $R_0=100 \Omega$.

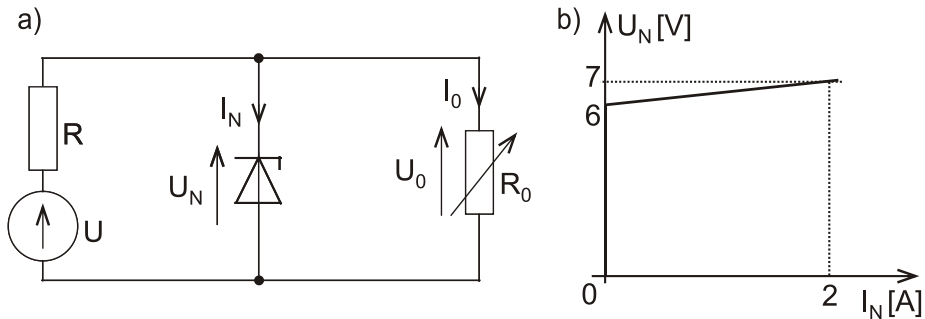


Rys. 14.16

Zadanie 14.17

W układzie przedstawionym na rys. 14.17a obliczyć, dla jakich wartości R_0 napięcie U_0 jest większe od 6 V, zaś moc wydzielona w diodzie Zenera nie przekracza 10 W. Charakterystyka napięciowo-prądowa diody Zenera jest przedstawiona na rys. 14.17b.

Dane: $U=10$ V, $R=2$ Ω .

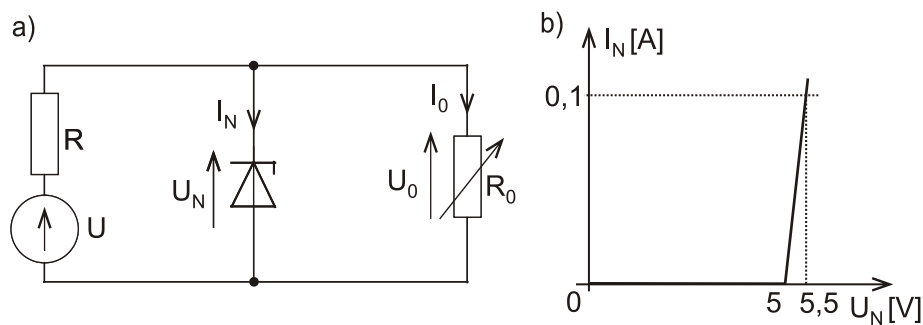


Rys. 14.17

Zadanie 14.18

W układzie przedstawionym na rys. 14.18a wyznaczyć charakterystykę $U_0=f(I_0)$. Charakterystyka napięciowo-prądowa diody Zenera jest przedstawiona na rys. 14.18b.

Dane: $U=20$ V, $R=100$ Ω .

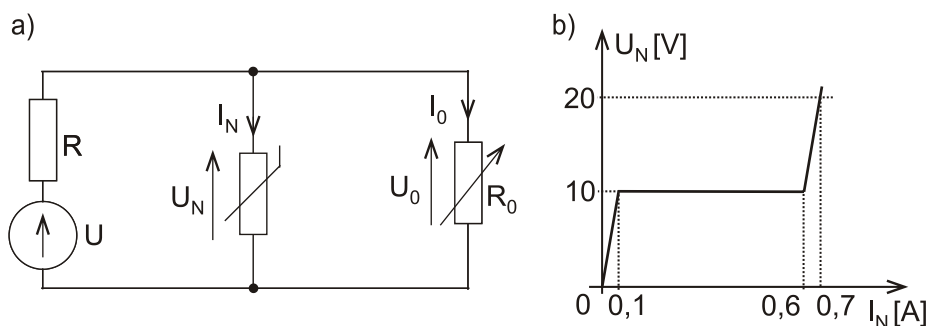


Rys. 14.18

Zadanie 14.19

W układzie przedstawionym na rys. 14.19a wyznaczyć zakres wartości R_0 , dla którego napięcie U_0 ma wartość 10 V, biorąc pod uwagę, że napięcie U może się wahać w granicach $\pm 10\%$ wokół podanej wartości. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego jest przedstawiona na rys. 14.19 b.

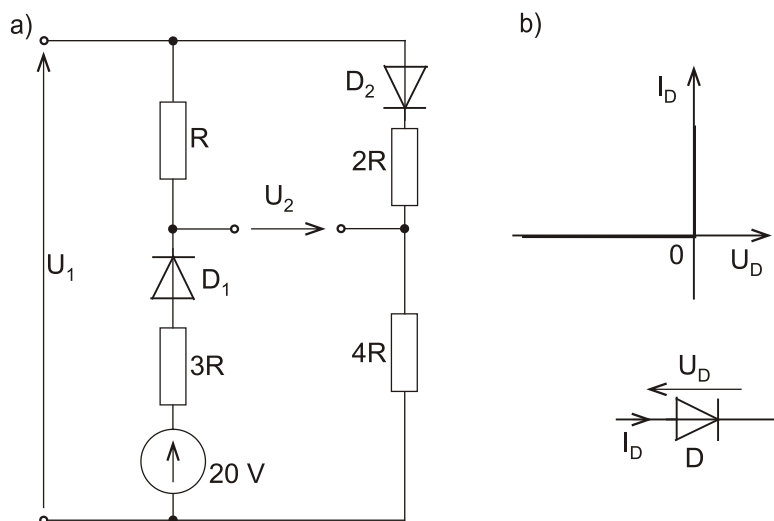
Dane: $U=30$ V, $R=100$ Ω .



Rys. 14.19

Zadanie 14.20

W układzie przedstawionym na rys. 14.20a wyznaczyć i narysować charakterystykę $U_2=f(U_1)$ zakładając, że napięcie U_1 może się zmieniać w granicach od -40 V do $+40\text{ V}$, zaś diody D_1 i D_2 są idealne, tzn. ich charakterystyka napięciowo-prądowa jest taka, jak przedstawiono na rys. 14.20b.

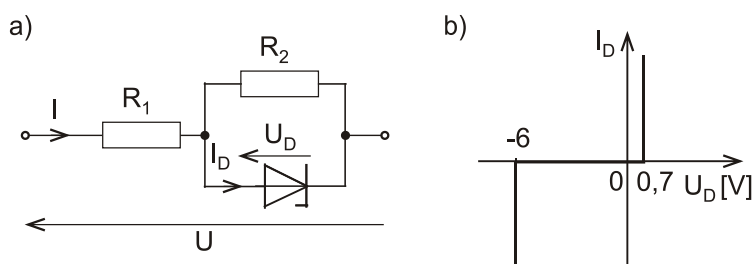


Rys. 14.20

Zadanie 14.21

W układzie przedstawionym na rys. 14.21a wyznaczyć i narysować wypadkową charakterystykę napięciowo-prądową układu $U=f(I)$, przy uproszczonej charakterystyce napięciowo-prądowej diody Zenera przedstawionej na rys. 14.21b.

Dane: $R_1=R_2=10\ \Omega$.

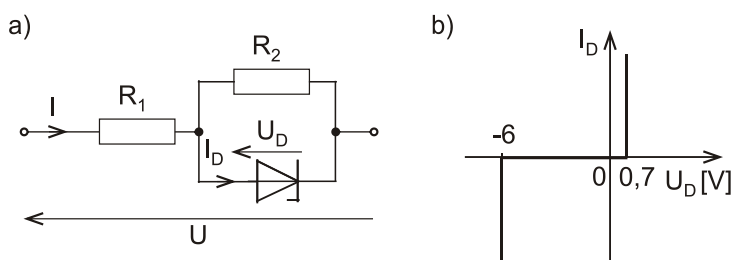


Rys. 14.21

Zadanie 14.22

W układzie przedstawionym na rys. 14.22a wyznaczyć i narysować wypadkową charakterystykę napięciowo-prądową układu $U=f(I)$, przy podanej na rys. 14.22b uproszczonej charakterystyce napięciowo-prądowej diody.

Dane: $R_1=R_2=5\ \Omega$.



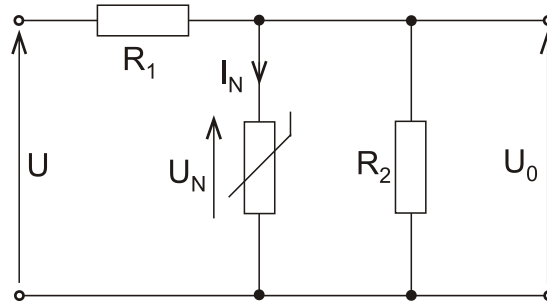
Rys. 14.22

Zadanie 14.23

W układzie przedstawionym na rys. 14.23 wyznaczyć charakterystykę transmitancyjną układu $U=f(U_0)$, jeżeli charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$I_N = a \cdot U_N^3.$$

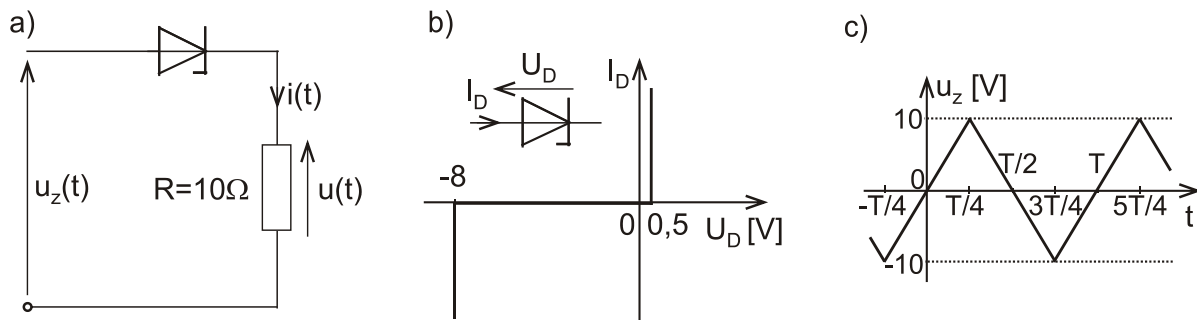
Dane: $a=0,1 \text{ A/V}^3$, $R_1=5 \Omega$, $R_2=10 \Omega$.



Rys. 14.23

Zadanie 14.24

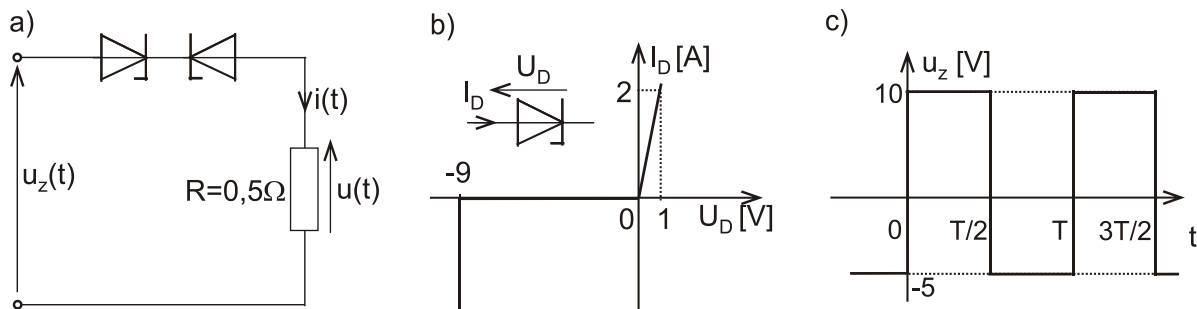
W układzie przedstawionym na rys. 14.24a wyznaczyć i narysować przebieg napięcia $u(t)$ oraz prądu $i(t)$ przy charakterystyce napięciowo-prądowej diody Zenera przedstawionej na rys. 14.24b, dla przebiegu napięcia wejściowego $u_z(t)$ podanego graficznie na rys. 14.24c.



Rys. 14.24

Zadanie 14.25

W układzie przedstawionym na rys. 14.25a wyznaczyć i narysować przebieg napięcia $u(t)$ przy charakterystyce napięciowo-prądowej diod Zenera podanej na rys. 14.25b i przebiegu napięcia wejściowego $u_z(t)$ przedstawionym graficznie na rys. 14.25c.



Rys. 14.25

Zadanie 14.26

W układzie przedstawionym na rys. 14.26 wyznaczyć przebieg prądu $i_N(t)$ elementu nieliniowego. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$U_N = a \cdot I_N + b \cdot |I_N| \cdot I_N$$

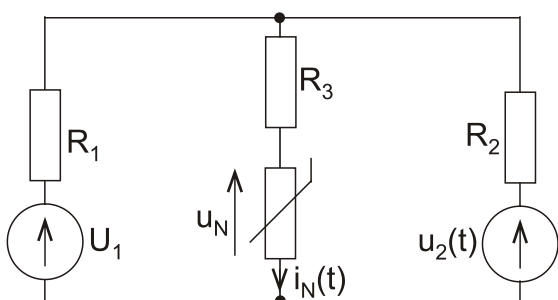
Dane: $a=10 \text{ V/A}$, $b=0,1 \text{ V/A}^2$, $U_1=12 \text{ V}$, $R_1=5 \Omega$, $R_2=45 \Omega$, $R_3=5,5 \Omega$, $u_2(t)=1 \cdot \sin 1000t \text{ V}$.

Zadanie 14.27

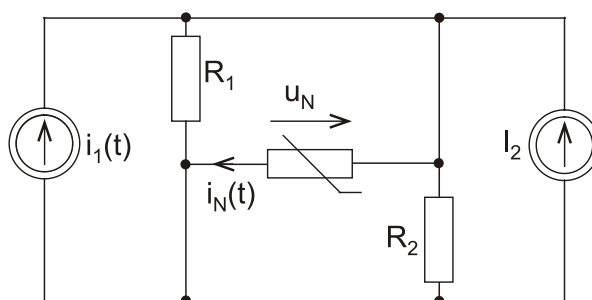
W układzie przedstawionym na rys. 14.27 wyznaczyć przebieg prądu $i_N(t)$ elementu nieliniowego. Charakterystyka napięciowo-prądowa elementu nieliniowego wyrażona jest zależnością:

$$U_N = a \cdot e^{b \cdot I_N}$$

Dane: $a=2 \text{ V}$, $b=1,8 \text{ A}^{-1}$, $I_2=0,8 \text{ A}$, $i_1(t)=0,02 \cdot \sin 314t \text{ A}$, $R_1=10 \Omega$, $R_2=40 \Omega$.



Rys. 14.26



Rys. 14.27

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA

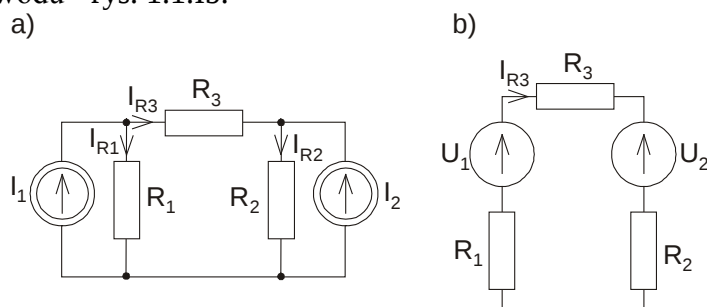
I. OBWODY LINIOWE PRĄDU STAŁEGO

1. PODSTAWOWE PRAWA I POJĘCIA

Zadanie 1.1

Rozwiązanie:

Po przekształceniu źródeł prądowych (rys. 1.1.Ia) na napięciowe otrzymujemy schemat zastępczy obwodu - rys. 1.1.Ib.



Rys. 1.1.I

Napięcia zastępczych źródeł wynoszą: $U_1 = R_1 \cdot I_1 = 80 \text{ V}$, $U_2 = R_2 \cdot I_2 = 20 \text{ V}$

Prąd w rezystancji R_3 obliczony dla schematu zastępczego wynosi:

$$I_{R3} = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 7,5 \text{ A}$$

Prądy w pozostałych rezystancjach w obwodzie pierwotnym wynoszą:

$$I_{R1} = I_1 - I_{R3} = 32,5 \text{ A}, \quad I_{R2} = I_2 + I_{R3} = 27,5 \text{ A}.$$

Do określenia bilansu mocy są potrzebne wartości napięć źródeł prądowych. Napięcia te są równe napięciom na rezystancjach połączonych równolegle ze źródłami:

$$U_1 = R_1 I_{R1} = 65 \text{ V}, \quad U_2 = R_2 I_{R2} = 27,5 \text{ V}.$$

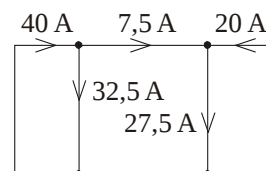
Moc źródeł obliczamy ze wzoru:

$$P_Z = U_1 I_1 + U_2 I_2,$$

natomiast moc odbiorników ze wzoru:

$$P_O = I_{R1}^2 R_1 + I_{R2}^2 R_2 + I_{R3}^2 R_3$$

Odpowiedź: Rozpływ prądów przedstawiono na grafie obwodu (rys. 1.1.II), bilans mocy: $P_Z = P_O = 3150 \text{ W}$.



Rys. 1.1.II

Zadanie 1.2

Rozwiązanie:

Oba źródła napięciowe (rys. 1.2.Ia) przekształcamy na źródła prądowe (rys. 1.2.Ib) o prądach:

$$I_{Z1} = \frac{U_{Z1}}{R_1}, \quad I_{Z2} = \frac{U_{Z2}}{R_2}.$$

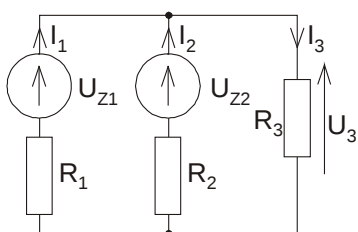
Można je zastąpić jednym źródłem prądowym (rys. 1.2.IIa) o prądzie:

$$I_Z = I_{Z1} + I_{Z2} = \frac{U_{Z1}R_2 + U_{Z2}R_1}{R_1R_2}$$

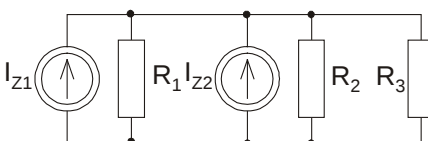
i rezystancji wewnętrznej:

$$R_Z = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = 1,2 \, \Omega.$$

a)

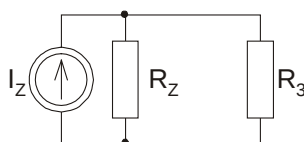


b)

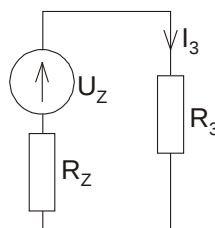


Rys. 1.2.I

a)



b)



Rys. 1.2.II

To zastępcze źródło prądowe można zamienić na napięciowe (rys. 1.2.IIb) o napięciu:

$$U_Z = I_Z \cdot R_Z = \frac{U_{Z1}R_2 + U_{Z2}R_1}{R_1 + R_2} = 116 \text{ V}.$$

Prąd w rezystancji R_3 można obliczyć z równania:

$$I_3 = \frac{U_Z}{R_Z + R_3} = 16,1 \text{ A},$$

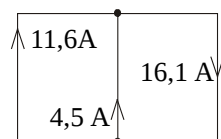
a napięcie na nim: $U_3 = I_3 R_3 = 96,6 \text{ V}$. Prąd w rezystancji R_1 , zgodnie z rys. 1.2.Ia, jest równy:

$$I_1 = \frac{U_{Z1} - U_3}{R_1} = 11,6 \text{ A},$$

a prąd w rezystancji R_2 obliczymy z sumy prądów węzła: $I_2 = I_3 - I_1 = 4,5 \text{ A}$.

Moc źródeł wynosi: $P_Z = U_{Z1}I_1 + U_{Z2}I_2$, a moc odbiorników: $P_O = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$

Odpowiedź: Bilans mocy: $P_Z = P_O = 1887 \text{ W}$, rozpływ prądów przedstawiono na grafie (rys. 1.2.III).



Rys. 1.2.III

Zadanie 1.3

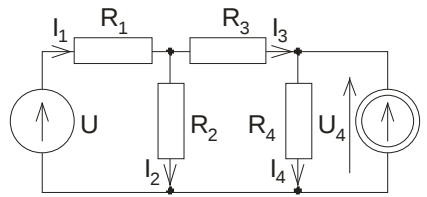
Rozwiązanie:

Rzeczywiste źródło prądowe (rys. 1.3.Ia) zastępujemy napięciowym (rys. 1.3.Ib) o sile elektromotorycznej:

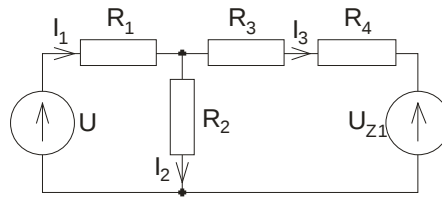
$$U_{Z1} = I \cdot R_4 = 120 \text{ V}$$

i rezystancji wewnętrznej R_4 .

a)



b)



Rys. 1.3.I

Dwa źródła napięciowe (gałąź U - R_1 i gałąź U_{Z1} - R_4 - R_3) można zastąpić jednym źródłem napięciowym o sile elektromotorycznej U_{Z2} i rezystancji R_Z (por. rozwiązanie zadania 1.2):

$$U_{Z2} = \frac{U(R_3 + R_4) + U_{Z1}R_1}{R_1 + R_3 + R_4} = 98,4 \text{ V}, \quad R_Z = \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4} = 0,9 \Omega$$

Prąd płynący przez rezystancję R_2 w tak otrzymanym obwodzie zastępczym (rys. 1.3.II) jest równy:

$$I_2 = \frac{U_{Z2}}{R_Z + R_2} = 11,06 \text{ A}.$$

Prąd źródła U można obliczyć z zależności:

$$U - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0.$$

Stąd $I_1 = 7,52 \text{ A}$. Pozostałe prądy są równe:

$$I_3 = I_1 - I_2 = -3,54 \text{ A}, \quad I_4 = I + I_3 = 11,46 \text{ A}.$$

Napięcie na źródle prądowym wynosi:

$$U_4 = I_4 R_4 = 91,68 \text{ V}.$$

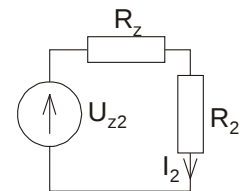
Moc źródeł:

$$P_Z = U \cdot I_1 + U_4 \cdot I_4.$$

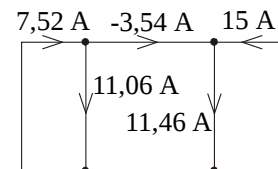
Moc odbiorników:

$$P_O = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4.$$

Odpowiedź: $P_Z = P_O = 2,1 \text{ kW}$, rozptył prądów przedstawiono na grafie (rys. 1.3.III).



Rys. 1.3.II



Rys. 1.3.III

Zadanie 1.4

Rozwiązanie:

Rezystancje R_1 i R_2 tworzą dzielnik napięcia (rys. 1.4.I). Napięcie U_1 na rezystancji R_1 można obliczyć z zależności określającej stosunek podziału napięć:

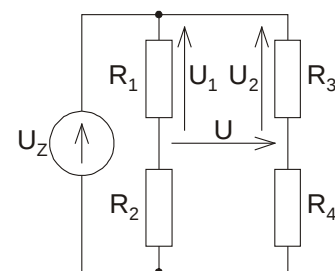
$$U_1 = U_Z \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 19,2 \text{ V}$$

Podobnie można obliczyć napięcie U_2 na rezystancji R_3 w dzielniku R_3 - R_4 :

$$U_2 = U_Z \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 30 \text{ V}$$

Napięcie U jest różnicą napięć U_1 i U_2 : $U = U_1 - U_2$.

Odpowiedź: $U = -10,8 \text{ V}$.



Rys. 1.4.I

Zadanie 1.5*Rozwiązanie:*

Obie gałęzie równoległe tworzą dzielnik prądu (rys. 1.5.I). Prąd w gałęzi z rezystancjami R_1 i R_2 można obliczyć z zależności określającej stosunek podziału prądów:

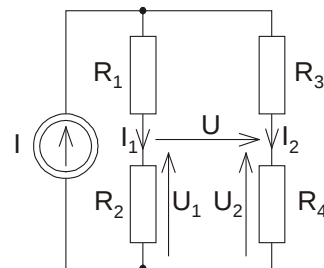
$$I_1 = I \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 4,8 \text{ A}$$

Prąd I_2 w drugiej gałęzi obliczamy z sumy prądów w węźle:

$$I_2 = I - I_1 = 7,2 \text{ A}.$$

Poszukiwane napięcie U można obliczyć jako różnicę spadków napięcia U_1 i U_2 na rezystancjach R_2 i R_4 : $U = I_2 R_4 - I_1 R_2$.

Odpowiedź: $U = 28,8 \text{ V}$.



Rys. 1.5.I

Zadanie 1.6

Odpowiedź: Przy łączniku otwartym $U = 150 \text{ V}$, przy łączniku zamkniętym $U = 120 \text{ V}$.

Zadanie 1.7*Rozwiązanie:*

Układ można traktować, jako dzielnik napięcia złożony z trzech rezystancji: R_1 , R_2 i R_{34} , która jest rezystancją zastępczą połączenia równoległego R_3 z R_4 (rys. 1.7.I).

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 2,5 \text{ k}\Omega$$

Napięcia na poszczególnych członach dzielnika mają się tak do napięcia zasilającego dzielnik, jak rezystancje tych członów do całkowitej rezystancji dzielnika. Stąd poszukiwane napięcia są określone zależnościami:

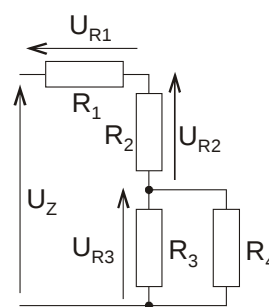
$$U_{R1} = U_Z \cdot \frac{R_1}{R_D}$$

$$U_{R2} = U_Z \cdot \frac{R_2}{R_D}$$

$$U_{R3} = U_Z \cdot \frac{R_{34}}{R_D}$$

gdzie $R_D = R_1 + R_2 + R_{34} = 22,5 \text{ k}\Omega$ jest całkowitą rezystancją dzielnika.

Odpowiedź: $U_{R1} = 750 \text{ V}$, $U_{R2} = 250 \text{ V}$, $U_{R3} = 125 \text{ V}$.



Rys. 1.7.I

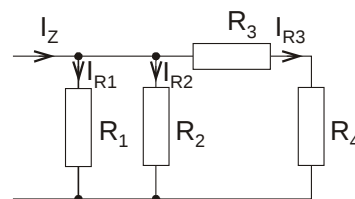
Zadanie 1.8*Rozwiązanie:*

Układ można traktować, jako dzielnik prądu złożony z trzech konduktancji: G_1 , G_2 i G_{34} , która jest konduktancją zastępczą połączenia szeregowego R_3 z R_4 (rys. 1.8.I).

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = 1,25 \text{ mS}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2} = 2,5 \text{ mS}$$

$$G_{34} = \frac{1}{R_3 + R_4} = 5 \text{ mS}$$

Prądy poszczególnych członów dzielnika mają się tak do prądu zasilającego dzielnik, jak konduktancje tych członów do całkowitej konduktancji dzielnika. Stąd poszukiwane prądy są określone



Rys. 1.8.I

zależnościami:

$$I_{R1} = I_Z \cdot \frac{G_1}{G_D}$$

$$I_{R2} = I_Z \cdot \frac{G_2}{G_D}$$

$$I_{R3} = I_Z \cdot \frac{G_{34}}{G_D}$$

gdzie $G_D = G_1 + G_2 + G_{34} = 8,75 \text{ mS}$ jest całkowitą konduktancją dzielnika.

Odpowiedź: $I_{R1} = 0,1 \text{ A}$, $I_{R2} = 0,2 \text{ A}$, $I_{R3} = 0,4 \text{ A}$.

Zadanie 1.9

Rozwiązanie:

Na podstawie praw Kirchhoffa można zapisać równania, z których wylicza się prądy I_1 , I_2 , I_3 (rys. 1.9.I):

$$I_1 R_1 = U_1 - U_2$$

$$I_2 R_2 = U_2 - U_3$$

$$I_3 R_3 = U_3 - U_1$$

oraz równania określające prądy I_4 , I_5 , I_6 :

$$I_4 = I_1 - I_3$$

$$I_5 = I_2 - I_1$$

$$I_6 = I_3 - I_2$$

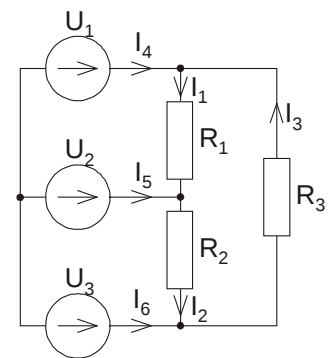
Moc źródeł:

$$P_Z = U_1 I_4 + U_2 I_5 + U_3 I_6$$

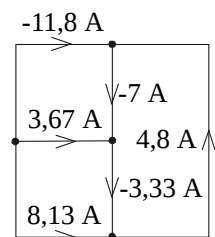
Moc odbiorników:

$$P_O = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$$

Odpowiedź: $P_Z = P_O = 246,5 \text{ W}$, rozptyw prądów przedstawiono na grafie (rys. 1.9.II).



Rys. 1.9.I



Rys. 1.9.II

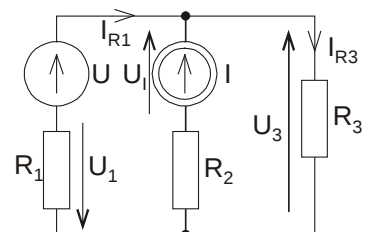
Zadanie 1.10

Rozwiązanie:

W obwodzie są dwa nieznanne prądy: I_{R1} i I_{R3} . Należy sporządzić układ dwóch równań, w których będą one występowały jako niewiadome. Pierwsze równanie zostanie zapisane na podstawie I prawa Kirchhoffa dla jednego z węzłów. Drugie równanie – z II prawa Kirchhoffa dla oczka, w którym występują elementy: U , R_1 , R_3 (rys. 1.10.I).

$$I_{R1} + I - I_{R3} = 0$$

$$U - R_1 I_{R1} - R_3 I_{R3} = 0$$



Rys. 1.10.I

Po podstawieniu danych zadania i przekształceniu, układ równań przyjmuje postać:

$$-I_{R1} + I_{R3} = 0,8$$

$$4I_{R1} + 12I_{R3} = 12$$

W wyniku rozwiązania tego układu równań otrzymuje się wartości poszukiwanych prądów. Moc źródeł jest równa

$$P_Z = UI_{R1} + U_I I$$

gdzie U_I oznacza napięcie źródła prądowego. Można je wyznaczyć z II prawa Kirchhoffa dla oczka zawierającego elementy: I , R_2 , R_3 :

$$U_I - R_2 I - R_3 I_{R3} = 0$$

Po przekształceniu:

$$U_I = R_2 I + R_3 I_{R3}$$

Moc odbiorników:

$$P_O = I_{R1}^2 R_1 + I^2 R_2 + I_{R3}^2 R_3$$

Odpowiedź: $I_{R1} = 0,15$ A, $I_{R3} = 0,95$ A, $P_Z = P_O = 17,32$ W.

Zadanie 1.11

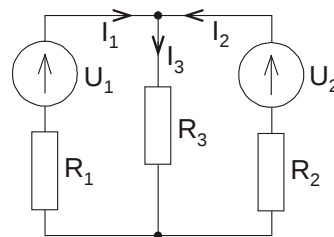
Rozwiązanie:

Rozpływ prądów w obwodzie obliczamy, rozwiązując układ równań, napisany zgodnie z prawami Kirchhoffa, w którym niewiadomymi są trzy prądy I_{R1} , I_{R2} , I_{R3} – rys. 1.11.I:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$U_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0$$

$$U_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0$$



Rys. 1.11.I

Moc źródeł:

$$P_Z = U_1 I_1 + U_2 I_2$$

Moc odbiorników:

$$P_O = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$$

Odpowiedź: $I_1 = 6,25$ A, $I_2 = -1,5$ A, $I_3 = 4,75$ A, $P_Z = P_O = 630$ W.

Zadanie 1.12

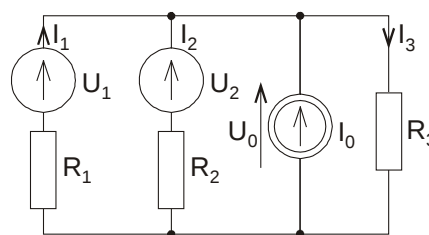
Rozwiązanie:

W obwodzie występują trzy niewiadome prądy I_1 , I_2 , I_3 – rys. 1.12.I. Obwód zawiera dwa węzły. Stąd układ równań składa się z trzech równań, z których pierwsze powstało na podstawie I prawa Kirchhoffa, a dwa pozostałe – na podstawie II prawa Kirchhoffa. Jego postać jest następująca:

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_0 = 0$$

$$U_1 - I_1 R_1 + I_2 R_2 - U_2 = 0$$

$$U_2 - I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0$$



Rys. 1.12.I

Po uporządkowaniu i podstawieniu danych otrzymujemy:

$$I_1 + I_2 - I_3 = -0,5$$

$$2I_1 - 5I_2 = 4$$

$$5I_2 + 20I_3 = 20$$

Po obliczeniu prądów obliczamy bilans mocy. W mocy źródeł należy uwzględnić moc źródła prądowego. W tym celu wyznaczamy napięcie tego źródła, które jest równe napięciu na rezystancji R_3 :

$$U_0 = R_3 I_3$$

Moc źródeł:

$$P_Z = U_0 I_0 + U_1 I_1 + U_2 I_2$$

Moc odbiorników:

$$P_O = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$$

Odpowiedź: $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = -0,4 \text{ A}$, $I_3 = 1,1 \text{ A}$, $P_Z = P_O = 27 \text{ W}$.

Zadanie 1.13

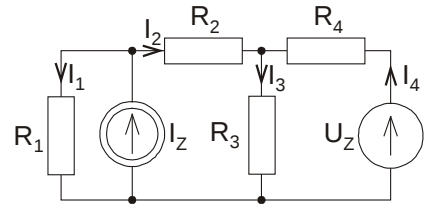
Odpowiedź: Układ równań może mieć postać (oznaczenia zgodnie z rys. 1.13.I):

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_Z \\ I_2 - I_3 + I_4 = 0 \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 \\ I_3 R_3 + I_4 R_4 = U_Z \end{cases}$$

$$I_1 = 4,21 \text{ A}, I_2 = 10,79 \text{ A}, I_3 = 2,87 \text{ A},$$

$$I_4 = -7,92 \text{ A},$$

$$\text{Bilans mocy: } P_Z = P_O = 386,8 \text{ W}.$$



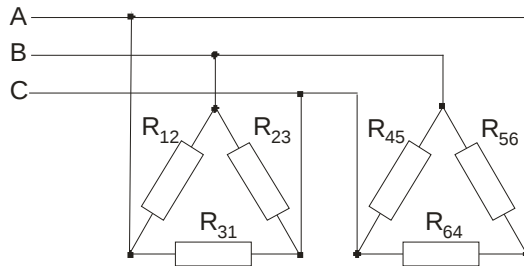
Rys. 1.13.I

Zadanie 1.14

Rozwiązanie:

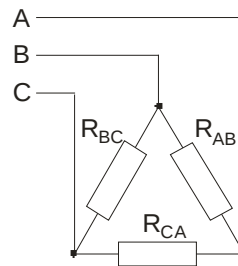
Obie gwiazdy rezystancji zastępujemy równoważnymi układami rezystancji połączonych w trójkąt – rys. 1.14.Ia:

a)



Rys. 1.14.I

b)



$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = 70 \Omega, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} = 35 \Omega,$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} = 17,5 \Omega, \quad R_{45} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 R_5}{R_6} = 110 \Omega$$

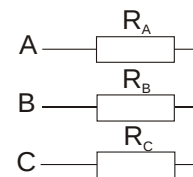
$$R_{56} = R_5 + R_6 + \frac{R_5 R_6}{R_4} = 220 \Omega, \quad R_{64} = R_6 + R_4 + \frac{R_6 R_4}{R_5} = 275 \Omega.$$

Odpowiednie ramiona zastępczych trójkątów są połączone równolegle, stąd cały układ można zastąpić jednym trójkątem rezystancji (rys. 1.14.Ib) o wartościach:

$$R_{AB} = \frac{R_{12} R_{56}}{R_{12} + R_{56}} = 53,1 \Omega, \quad R_{BC} = \frac{R_{23} R_{45}}{R_{23} + R_{45}} = 26,55 \Omega, \quad R_{CA} = \frac{R_{31} R_{64}}{R_{31} + R_{64}} = 16,45 \Omega.$$

Ostatecznie otrzymany trójkąt rezystancji zamieniamy na poszukiwaną gwiazdę rezystancji (rys. 1.14.II):

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}, R_B = \frac{R_{BC}R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}, R_C = \frac{R_{CA}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$



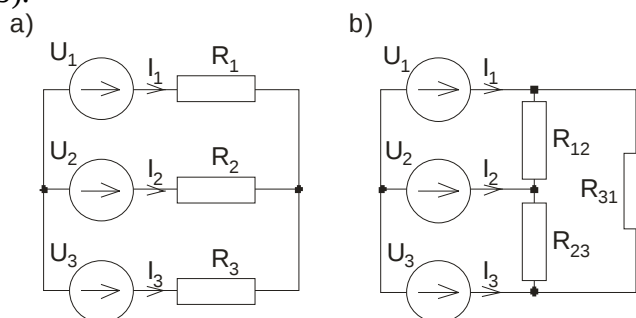
Rys. 1.14.II

Odpowiedź: $R_A = 9,09 \Omega$, $R_B = 14,67 \Omega$, $R_C = 4,55 \Omega$.

Zadanie 1.15

Rozwiązanie:

Gwiazdę rezystancji R_1 - R_2 - R_3 (rys. 1.15.Ia) zamieniamy na równoważny trójkąt R_{12} - R_{23} - R_{31} (rys. 1.15.Ib).



Rys. 1.15.I

Rezystancje zastępcze mają wartość:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = 20 \Omega$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} = 60 \Omega$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} = 20 \Omega$$

Dalej rozwiązanie przebiega dokładnie tak samo, jak w zad. 1.9.

Odpowiedź: $I_1 = 0,25 \text{ A}$, $I_2 = 0,625 \text{ A}$, $I_3 = -0,875 \text{ A}$,
Bilans mocy: $P_Z = P_O = 11,875 \text{ W}$.

Zadanie 1.16

Wskazówka:

Obwód zawiera dwa połączenia rezystancji w trójkąt (R_1 - R_3 - R_5 oraz R_2 - R_4 - R_5) i dwa połączenia rezystancji w gwiazdę (R_1 - R_2 - R_5 oraz R_3 - R_4 - R_5) – rys. 1.16. Po zastąpieniu jednego z trójkątów rezystancji równoważną gwiazdą, lub jednej z gwiazd rezystancji równoważnym trójkątem, można obliczyć rezystancję zastępczą całego obwodu z punktu widzenia zacisków źródła. Poszukiwany prąd źródła oblicza się następnie wykorzystując prawo Ohma.

Odpowiedź: Rezystancja zastępcza obwodu $R_Z = 44 \Omega$, prąd źródła $I_Z = 2,5 \text{ A}$

Zadanie 1.17*Rozwiązanie:*

Obwód jest tzw. układem mostkowym. Jeżeli prąd w rezystancji R_5 , tworzącej przekątną mostka, jest równy zero, to zachodzą następujące równości (rys. 1.17.I):

$$U_5 = 0, I_1 = I_2, I_3 = I_4.$$

Uwzględniając to, można na podstawie II prawa Kirchhoffa zapisać:

$$I_1 R_1 = I_3 R_3$$

$$I_1 R_2 = I_3 R_4$$

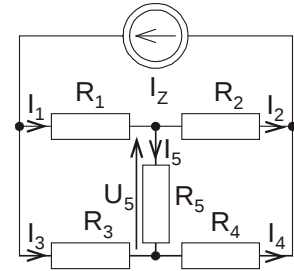
Dzieląc stronami powyższe równania otrzymuje się:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Po przekształceniu uzyskuje się zależność na wartość rezystancji R_4 :

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} = 6 \Omega$$

Ze względu na to, że $I_5 = 0$, rezystancję R_5 można w rozwiązaniu pominąć i w dalszym rozwiązaniu obwód potraktować tak, jak układ z zad. 1.5.



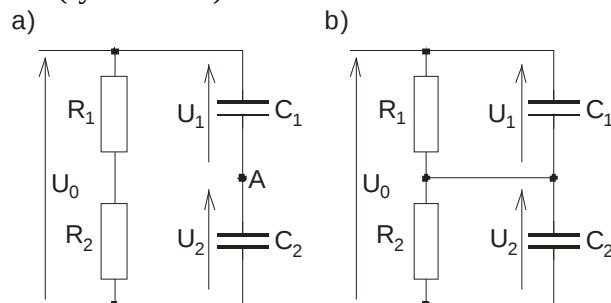
Rys. 1.17.I

Odpowiedź: Rezystancje muszą spełniać zależność $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$, $I_1 = I_2 = 0,9 \text{ A}$, $I_3 = I_4 = 1,5 \text{ A}$,

bilans mocy: $P_Z = P_O = 108 \text{ W}$

Zadanie 1.18*Rozwiązanie:*

Łącznik traktujemy, jako idealny, tzn. w stanie otwartym stanowi on rezystancję nieskończenie wielką – przerwa w obwodzie (rys. 1.18.Ia), w stanie zamkniętym stanowi rezystancję zerową – zwarcie (rys. 1.18.Ib).



Rys. 1.18.I

Przy otwartym łączniku napięcia na kondensatorach zależą od ich pojemności. Węzeł A na rys. 1.18.Ia nie ma połączenia z innym punktem obwodu, które umożliwiłoby przepływ ładunku elektrycznego ze źródła do tego węzła lub w kierunku przeciwnym. Dlatego ładunek elektryczny zgromadzony w tej części obwodu (na okładkach kondensatorów podłączonych do tego węzła) nie może ulec zmianie (zasada zachowania ładunku). Zakładamy, że przed dołączeniem zasilania był on równy zero. W takim przypadku można zapisać dwa równania wiążące poszukiwane napięcia. Pierwsze, z zasady zachowania ładunku w węzle A:

$$C_2 U_2 - C_1 U_1 = 0$$

Drugie równanie - z II prawa Kirchhoffa:

$$U_1 + U_2 = U_0$$

Układ dwóch powyższych równań daje w rozwiązaniu wartości napięć przy otwartym łączniku.

Przy łączniku zamkniętym rezystancje są połączone równolegle z kondensatorami i napięcia na kondensatorach są równe napięciom na odpowiednich rezystancjach, przez które płynie prąd stały, pobierany ze źródła. Kondensatory nie biorą udziału w przepływie prądu, dlatego układ rezystancji

można potraktować, tak jak dzielnik napięcia stałego. W tym przypadku napięcia na kondensatorach można wyznaczyć z zależności dla dzielnika napięcia:

$$U_1 = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

i z równania dla II prawa Kirchhoffa, zapisanego powyżej.

Odpowiedź Dla łącznika otwartego: $U_1 = 40 \text{ V}$, $U_2 = 60 \text{ V}$,

dla łącznika zamkniętego: $U_1 = 75 \text{ V}$, $U_2 = 25 \text{ V}$.

Zadanie 1.19

Rozwiązanie:

W obwodzie prądu stałego, w stanie ustalonym pojemność należy traktować, jak przerwę, a indukcyjność, jak zwarcie. Zatem obliczenia poszukiwanych wielkości można przeprowadzić obwodzie, jak na rys. 1.19.I.

Z II prawa Kirchhoffa wynika następujące równanie:

$$I_1 - I_2 - I_L = 0$$

Prądy w tym równaniu można wyrazić przez napięcie U_C :

$$I_1 = \frac{U_Z - U_C}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_C}{R_2}, \quad I_L = \frac{U_C}{R_3}$$

Po podstawieniu tych równości do pierwszego równania otrzymujemy:

$$\frac{U_Z - U_C}{R_1} - \frac{U_C}{R_2} - \frac{U_C}{R_3} = 0$$

Po przekształceniu otrzymujemy równanie, z którego oblicza się napięcie na pojemności:

$$U_C = \frac{\frac{U_Z}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}.$$

Po obliczeniu U_C prąd I_L wyliczamy z równości sformułowanej wcześniej.

Odpowiedź: $U_C = 12 \text{ V}$, $I_L = 1 \text{ A}$.

Zadanie 1.20

Odpowiedź: Napięcie na pojemności $U_C = 18 \text{ V}$, prąd indukcyjności $I_L = 600 \text{ mA}$.

Zadanie 1.21

Odpowiedź: Napięcie na pojemności $U_C = 22,5 \text{ V}$, prąd indukcyjności $I_L = 0,75 \text{ A}$.

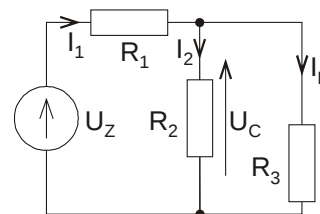
Zadanie 1.22

Rozwiązanie:

W oczku utworzonym przez gałęzie zawierające rezystancje płynie prąd I (rys. 1.22.I), który można obliczyć z równania dla II prawa Kirchhoffa:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = U_{Z2} - U_{Z1}$$

Stąd: $I = 0,25 \text{ A}$. Napięcia na kondensatorach obliczamy z układu równań napisanego na podstawie zasady zachowania ładunku w węźle środkowym i II prawa Kirchhoffa dla odpowiednich oczek:



Rys. 1.19.I

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 = 0$$

$$U_{z1} + I \cdot R_1 + U_1 - U_2 = 0$$

$$U_{z2} - I \cdot R_2 + U_1 - U_3 = 0$$

Odpowiedź: $U_1 = -24,5 \text{ V}$, $U_2 = 10,5 \text{ V}$, $U_3 = 28 \text{ V}$.

Zadanie 1.23

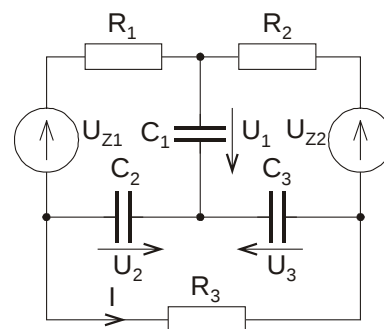
Odpowiedź: $U_1 = 132 \text{ kV}$, $U_2 = 88 \text{ kV}$.

Zadanie 1.24

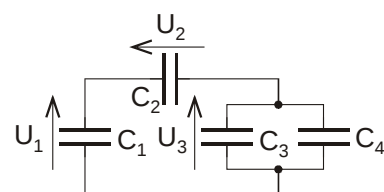
Odpowiedź: Maksymalna wartość $U = 81 \text{ kV}$.

Zadanie 1.25

Odpowiedź: $U_1 = 80 \text{ V}$, $U_2 = 20 \text{ V}$, $U_3 = 60 \text{ V}$, oznaczenia wg rys. 1.25.I



Rys. 1.22.I



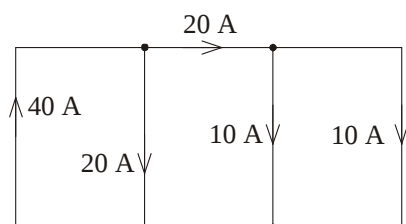
Rys. 1.25.I

2. METODA PODOBIENSTWA I METODA SUPERPOZYCJI

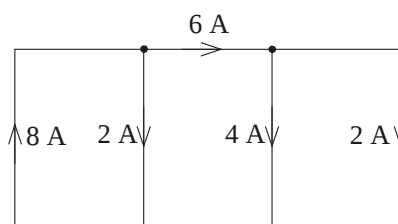
METODA PODOBIENSTWA

Zadanie 2.1

Odpowiedź: $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=6,4 \text{ kW}$, rozplływ prądów przedstawiono na grafie (rys. 2.1.I).



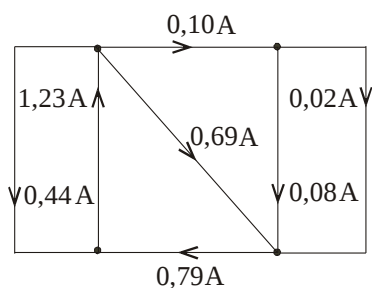
Rys. 2.1.I



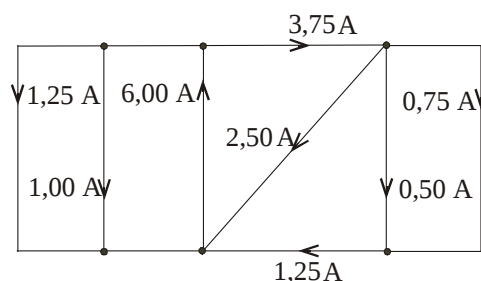
Rys. 2.2.I

Zadanie 2.3

Odpowiedź: $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=737 \text{ W}$, rozplływ prądów podano na grafie (rys. 2.3.I).



Rys. 2.3.I



Rys. 2.4.I

Zadanie 2.5

Rozwiązanie:

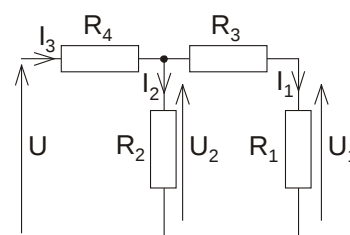
Napięcie na rezystorze R_1 (rys. 2.5.I) wynosi:

$$U_1 = \frac{P_1}{I_1} = 160 \text{ V}$$

Napięcie na rezystorze R_2 jest równe sumie napięć na rezystorach R_1 i R_3 :

$$U_2 = U_1 + I_1 R_3 = 170 \text{ V}$$

Prąd w rezystancji R_2 jest równy:



Rys. 2.5.I

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 4,25 \text{ A}$$

Prąd w rezystancji R_4 jest równy: $I_3 = I_1 + I_2 = 6,25 \text{ A}$

Napięcie zasilające wynika z zależności: $U = U_2 + I_3 R_4 = 195 \text{ V}$

Współczynnik podobieństwa dla zmienionej wartości napięcia zasilającego wynosi:

$$k = \frac{220}{195} = 1,128$$

Przy innym napięciu zasilania prąd w rezystancji R_1 jest równy kI_1 , a moc wynosi $k^2 P_1$.

Odpowiedź: $U=195 \text{ V}$, dla $U=220 \text{ V}$ $I_1=2,26 \text{ A}$, $P_1=407,2 \text{ W}$.

Zadanie 2.6

Odpowiedź: dla $U_Z=12 \text{ V}$ $U=5,18 \text{ V}$, $I=1,5 \text{ A}$.
 $U=12 \text{ V}$ jeśli $U_Z=27,78 \text{ V}$.

Zadanie 2.7

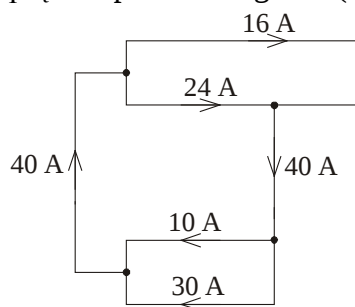
Odpowiedź: $U_Z=20 \text{ V}$, $I=5 \text{ A}$, $P=100 \text{ W}$, dla $U_Z=100 \text{ V}$ $P=2,5 \text{ kW}$.

Zadanie 2.8

Odpowiedź: $U_Z=23,9 \text{ V}$, $P_{01}=212,3 \text{ W}$, $P_{02}=154,4 \text{ W}$,
dla $U_Z=20 \text{ V}$ $P_{01}=148,5 \text{ W}$, $P_{02}=108,0 \text{ W}$, $P_{03}=93,0 \text{ W}$.

Zadanie 2.9

Odpowiedź: $U=296 \text{ V}$, rozpływ prądów podano na grafie (rys. 2.9.I).



Rys. 2.9.I

Zadanie 2.10 Zadanie 2.10

Odpowiedź: $U=26,83 \text{ V}$, $I=0,5 \text{ A}$.

METODA SUPERPOZYCJI**Zadanie 2.11***Rozwiązanie:*

Obwód rozwiązujemy najpierw dla źródła napięciowego (rys. 2.11.I), potem dla prądowego (rys. 2.11.II). W obwodzie pozbawionym źródła prądowego prądy rezystancji mają wartości:

$$I'_1 = I'_2 = \frac{U_Z}{R_1 + R_2} = 0,096 \text{ A} \quad I'_3 = I'_4 = \frac{U_Z}{R_3 + R_4} = 0,08 \text{ A}$$

Po usunięciu źródła napięciowego prądy rezystancji liczymy ze wzoru na dzielnik prądu:

$$I''_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,144 \text{ A} \quad I''_1 = I''_2 - I = -0,096 \text{ A}$$

$$I''_3 = I \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 0,08 \text{ A} \quad I''_4 = I''_3 - I = -0,16 \text{ A}$$

Rozpływ prądów w obwodzie wyjściowym jest sumą rozpływów dla poszczególnych źródeł:

$$\begin{aligned} I_1 &= I'_1 + I''_1 = 0 & I_2 &= I'_2 + I''_2 = 0,24 \text{ A} \\ I_3 &= I'_3 + I''_3 = 0,16 \text{ A} & I_4 &= I'_4 + I''_4 = -0,08 \text{ A} \end{aligned}$$

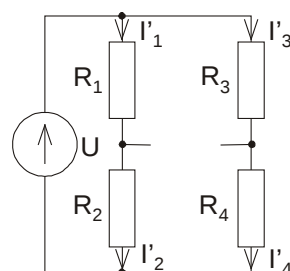
Napięcie na źródle prądowym w obwodzie wyjściowym obliczamy z II prawa Kirchhoffa:

$$U = I_3 R_3 - I_1 R_1 = 16 \text{ V}$$

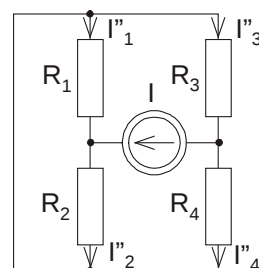
Moc pobierana przez odbiorniki: $P_{\text{odb}} = \sum_{i=1}^4 I_i^2 R_i$.

Moc oddawana przez źródła: $P_{\text{zr}} = U_Z (I_1 + I_3) + UI$.

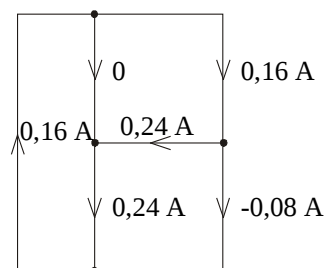
Odpowiedź: $P_{\text{zr}} = P_{\text{odb}} = 5,76 \text{ W}$. Rozpływ prądów zamieszczono na grafie (rys. 2.11.III).



Rys.2.11.I



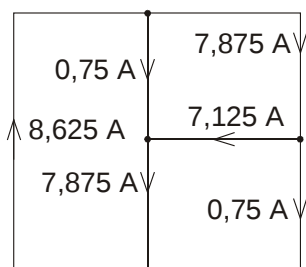
Rys.2.11.II



Rys.2.11.III

Zadanie 2.12

Odpowiedź: Rozpływ prądów podano na grafie (rys. 2.12.I).



Rys.2.12.I

R

Zadanie 2.13

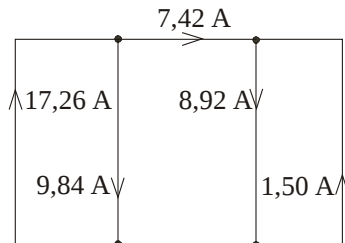
Odpowiedź: $I_1=1,12\text{ A}$, $I_2=1,12\text{ A}$.

Zadanie 2.14

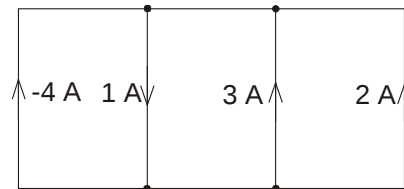
Odpowiedź: Rozpływ prądów zaprezentowano na grafie(rys. 2.14.I).

Zadanie 2.15

Odpowiedź: Rozpływ prądów zaprezentowano na grafie (rys. 2.15.I). $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=62\text{ W}$.



Rys. 2.14.I



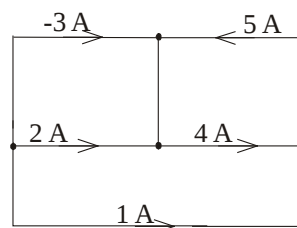
Rys. 2.15.I

Zadanie 2.16

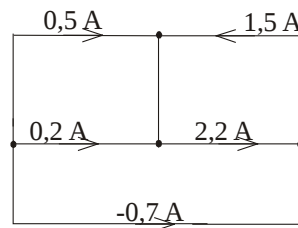
Odpowiedź: Rozpływ prądów zaprezentowano na grafie (rys. 2.16.I).

Zadanie 2.17

Odpowiedź: Rozpływ prądów zaprezentowano na grafie (rys. 2.17.I).



Rys. 2.16.I



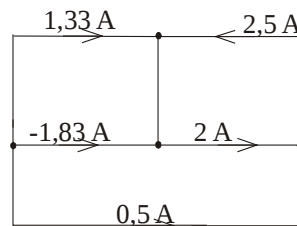
Rys. 2.17.I

Zadanie 2.18

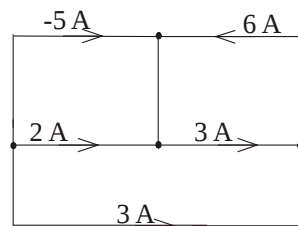
Odpowiedź: Rozpływ prądów zaprezentowano na grafie (rys. 2.18.I).

Zadanie 2.19

Odpowiedź: Rozpływ prądów zaprezentowano na grafie (rys. 2.19.I).



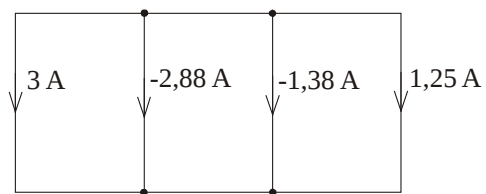
Rys. 2.18.I



Rys. 2.19.I

Zadanie 2.20

Odpowiedź: Rozpływ prądów zaprezentowano na grafie (rys. 2.20.I).



Rys.2.20.I

3. METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

Zadanie 3.1

Rozwiązanie:

W obwodzie występują dwa węzły (rys. 3.1.I). Przyjmując, że dolny ma potencjał V_0 równy zero, mamy do obliczenia wartość potencjału V_1 górnego węzła. Z pierwszego prawa Kirchhoffa wynika dla tego węzła następujące równanie:

$$I_1 - I_3 + I + I_2 = 0$$

Wyrażamy prądy za pomocą potencjału V_1 :

$$I_1 = \frac{U_1 - V_1}{R_1}, I_2 = \frac{U_2 - V_1}{R_2}, I_3 = \frac{V_1}{R_3}$$

Po podstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy:

$$\frac{U_1 - V_1}{R_1} - \frac{V_1}{R_3} + I + \frac{U_2 - V_1}{R_2} = 0$$

Z otrzymanego równania obliczamy potencjał V_1 :

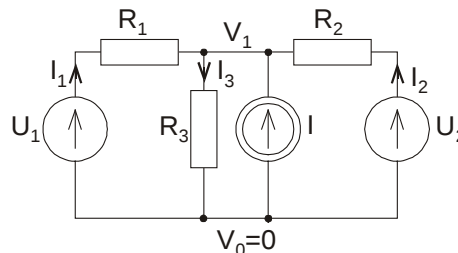
$$V_1 = \frac{I + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 10 \text{ V}.$$

Uzyskaną wartość potencjału podstawiamy do odpowiednich wzorów sformułowanych powyżej i obliczamy prądy w obwodzie.

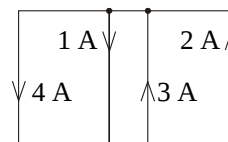
Moc pobierana przez odbiorniki jest równa: $P_{\text{odb}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$.

Moc oddawaną przez źródła określamy następująco: $P_{\text{zr}} = U_1 I_1 + U_2 I_2 + V_1 I$

Odpowiedź: $P_{\text{zr}} = P_{\text{odb}} = 62 \text{ W}$, rozplływ prądów podano na grafie (rys. 3.1.II).



Rys. 3.1.I



Rys. 3.1.II

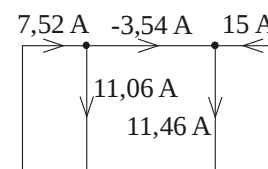
Zadanie 3.2

Odpowiedź: a) $U = 23,17 \text{ V}$, $I_1 = 2,77 \text{ A}$, $I_2 = -2,34 \text{ A}$, $I_3 = -0,43 \text{ A}$, $P_{\text{zr}} = P_{\text{odb}} = 5,11 \text{ W}$.

b) $U = 22,45 \text{ V}$, $I_1 = 5,16 \text{ A}$, $I_2 = -0,91 \text{ A}$, $I_3 = 1,37 \text{ A}$, $I_0 = 5,61 \text{ A}$, $P_{\text{zr}} = P_{\text{odb}} = 135,17 \text{ W}$.

Zadanie 3.3

Odpowiedź: $P_{\text{zr}} = P_{\text{odb}} = 3150 \text{ W}$, rozplływ prądów przedstawiono na grafie (rys. 3.3.I).



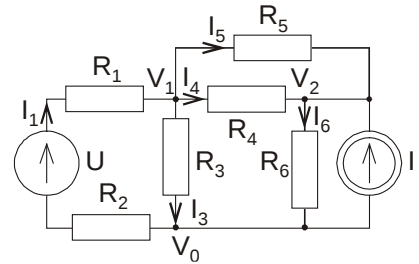
Rys. 3.3.I

Zadanie 3.4

Rozwiązanie:

Obwód zawiera trzy węzły o potencjałach V_0 , V_1 , V_2 (rys. 3.4.I). Przyjmujemy $V_0 = 0$. Potencjały V_1 i V_2 spełniają następujący układ równań:

$$\begin{cases} V_1 \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - V_2 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) = \frac{U}{R_1 + R_2} \\ V_2 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - V_1 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) = I \end{cases}$$



Rys. 3.4.I

Po podstawieniu danych układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{cases} 1,25V_1 - 0,625V_2 = 48 \\ -0,625V_1 + 0,75V_2 = 12 \end{cases}$$

Rozwiązując go otrzymujemy: $V_1 = 79,54 \text{ V}$, $V_2 = 82,29 \text{ V}$.

Prądy w poszczególnych gałęziach obliczamy ze wzorów:

$$I_1 = \frac{U - V_1}{R_1 + R_2}, \quad I_3 = \frac{V_1}{R_3}, \quad I_4 = \frac{V_1 - V_2}{R_4}, \quad I_5 = \frac{V_1 - V_2}{R_5}, \quad I_6 = \frac{V_2}{R_6}$$

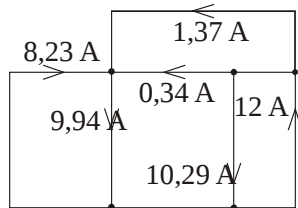
Moc pobrana przez odbiorniki jest równa: $P_{\text{odb}} = I_1^2 R_1 + I_1^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6$

Moc oddana przez źródła wynosi: $P_{\text{zr}} = UI_1 + V_2 I$

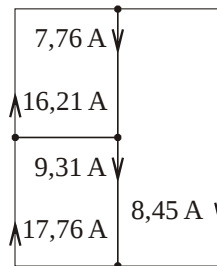
Odpowiedź: $P_{\text{zr}} = P_{\text{odb}} = 1777,37 \text{ W}$, rozptyw prądów podano na grafie (rys. 3.4.II).

Zadanie 3.5

Odpowiedź: $P_{\text{zr}} = P_{\text{odb}} = 3,74 \text{ kW}$, rozptyw prądów podano na grafie (rys. 3.5.I).



Rys. 3.4.II



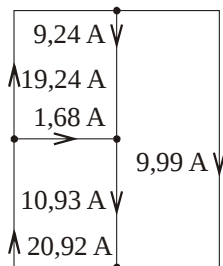
Rys. 3.5.I

Zadanie 3.6

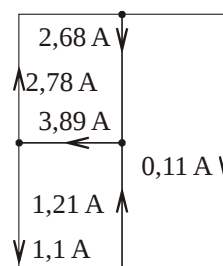
Odpowiedź: $P_{\text{zr}} = P_{\text{odb}} = 4,42 \text{ kW}$, rozptyw prądów podano na grafie (rys. 3.6.I).

Zadanie 3.7

Odpowiedź: $P_{\text{zr}} = P_{\text{odb}} = 182,6 \text{ W}$, rozptyw prądów podano na grafie (rys. 3.7.I).



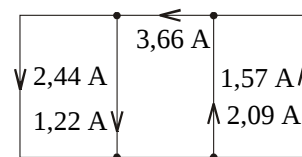
Rys. 3.6.I



Rys. 3.7.I

Zadanie 3.8

Odpowiedź: $P_{\text{zr}} = P_{\text{odb}} = 98,8 \text{ W}$, rozpyływ prądów podano na grafie (rys. 3.8.I).



Rys. 3.8.I

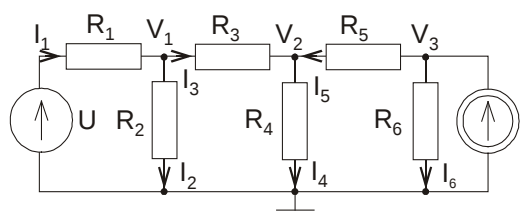
Zadanie 3.9

Odpowiedź: Moc pobierana ze źródeł wynosi 125 W, moc wydzielająca się w rezystancji R_0 jest równa 114,4 W.

Zadanie 3.10

Rozwiązanie:

Obwód zawiera cztery węzły, a zatem trzy niezależne, o nieznanych potencjałach V_1, V_2, V_3 (rys.3.10.I). Równanie macierzowe dla metody potencjałów węzłowych ma postać:



Rys. 3.10.I

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I},$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{U}{R_1} \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Elementy G_{11}, G_{22}, G_{33} głównej przekątnej macierzy konduktancji węzłowych $\mathbf{G}$ są sumami konduktancji własnych węzłów 1, 2 i 3. Pozostałe elementy macierzy $\mathbf{G}$ są konduktancjami wzajemnymi odpowiednich węzłów wziętymi ze znakiem minus. $\mathbf{I}$ jest wektorem prądów źródłowych dopływających do poszczególnych węzłów. Powyższy układ równań rozwiązujemy za pomocą wyznaczników:

$$g = \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7,9 & -5 & 0 \\ -5 & 9,5 & -4 \\ 0 & -4 & 4,1 \end{vmatrix} = 78,81 \frac{\text{A}^3}{\text{V}^3}$$

$$g_1 = \begin{vmatrix} \frac{U}{R_1} & G_{12} & G_{13} \\ 0 & G_{22} & G_{23} \\ I & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 500 & -5 & 0 \\ 0 & 9,5 & -4 \\ 22 & -4 & 4,1 \end{vmatrix} = 11915 \frac{\text{A}^3}{\text{V}^2}$$

$$g_2 = \begin{vmatrix} G_{11} & \frac{U}{R_1} & G_{13} \\ G_{21} & 0 & G_{23} \\ G_{31} & I & G_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7,9 & 500 & 0 \\ -5 & 0 & -4 \\ 0 & 22 & 4,1 \end{vmatrix} = 10945 \frac{A^3}{V^2}$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \frac{U}{R_1} \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ G_{31} & G_{32} & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7,9 & -5 & 500 \\ -5 & 9,5 & 0 \\ 0 & -4 & 22 \end{vmatrix} = 11101 \frac{A^3}{V^2}$$

Wartości potencjałów wyznaczamy ze wzorów Cramera:

$$V_1 = \frac{g_1}{g} = 151,2 \text{ V}, \quad V_2 = \frac{g_2}{g} = 138,89 \text{ V}, \quad V_3 = \frac{g_3}{g} = 140,87 \text{ V}.$$

Wartości prądów są określone następująco:

$$I_1 = \frac{U - V_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V_1}{R_2}, \quad I_3 = \frac{V_1 - V_2}{R_3}, \quad I_4 = \frac{V_2}{R_4}, \quad I_5 = \frac{V_3 - V_2}{R_5}, \quad I_6 = \frac{V_3}{R_6}.$$

Moc pobierana przez odbiorniki jest równa:

$$P_{\text{odb}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6,$$

a moc oddawana przez źródła wynosi:

$$P_z = UI_1 + V_3 I.$$

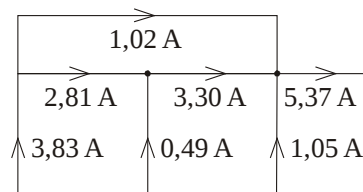
Odpowiedź: $I_1=122 \text{ A}$, $I_2=60,5 \text{ A}$, $I_3=61,5 \text{ A}$, $I_4=69,4 \text{ A}$, $I_5=7,9 \text{ A}$, $I_6=14,1 \text{ A}$,
 $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}} = 27,5 \text{ kW}$.

Zadanie 3.11

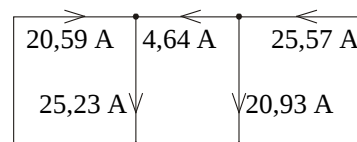
Odpowiedź: $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=125,77 \text{ W}$, rozptyw prądów przedstawiono na grafie (rys. 3.11.I).

Zadanie 3.12

Odpowiedź: $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=5334 \text{ W}$, rozptyw prądów przedstawiono na grafie (rys. 3.12.I).



Rys. 3.11.I



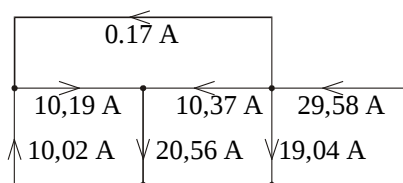
Rys. 3.12.I

Zadanie 3.13

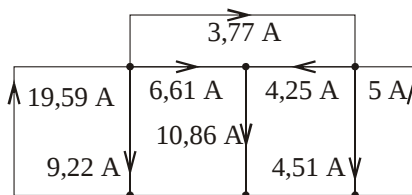
Odpowiedź: $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=8,51 \text{ kW}$, rozptyw prądów przedstawiono na grafie (rys. 3.13.I).

Zadanie 3.14

Odpowiedź: $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=1,2 \text{ kW}$, rozptyw prądów podano na grafie (rys. 3.14.I).



Rys. 3.13.I



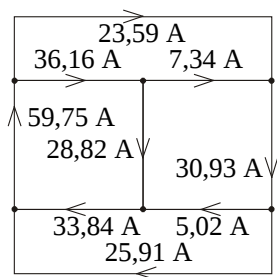
Rys. 3.14.I

Zadanie 3.15

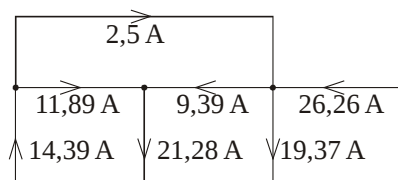
Odpowiedź: $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=3,8 \text{ kW}$, rozpływ prądów przedstawiono na grafie (rys. 3.15.I).

Zadanie 3.16

Odpowiedź: $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=8657 \text{ W}$, rozpływ prądów podano na grafie (rys. 3.16.I).



Rys. 3.15.I



Rys. 3.16.I

Zadanie 3.17

Odpowiedź: $U_V=41,7 \text{ V}$, $I_A=1,3 \text{ A}$.

Zadanie 3.18

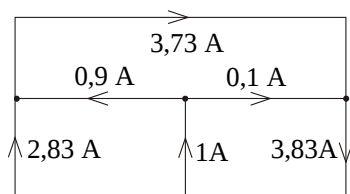
Odpowiedź: $U_{V1}=10,1 \text{ V}$, $U_{V2}=23,7 \text{ V}$, $U_{V3}=13,6 \text{ V}$.

Zadanie 3.19

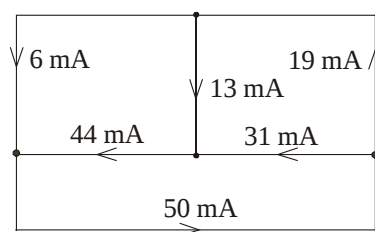
Odpowiedź: $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=110 \text{ W}$, rozpływ prądów przedstawiono na grafie (rys. 3.19.I).

Zadanie 3.20

Odpowiedź: $P_{\text{zr}}=P_{\text{odb}}=1,95 \text{ W}$, rozpływ prądów podano na grafie (rys. 3.20.I).



Rys. 3.19.I



Rys. 3.20.I

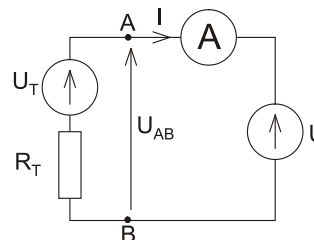
4. METODA WYKORZYSTUJĄCA TWIERDZENIE THEVENINA

Zadanie 4.1

Rozwiązanie:

Dwójnik źródłowy liniowy można potraktować jako źródło Thevenina o nieznanach parametrach U_T i R_T . Z warunków zadania, dla przedstawionego obwodu zastępczego (rys. 4.1.I), wynikają dwa równania z napięciowego prawa Kirchhoffa:

$$\begin{aligned} U_T - U - I_1 R_T &= 0 \\ U_T - (U - \Delta U) - I_2 R_T &= 0 \end{aligned}$$



Rys. 4.1.I

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy parametry źródła zastępczego: $U_T = 125 \text{ V}$, $R_T = 0,5 \Omega$. Napięcie między zaciskami A-B, gdy są one rozwarte, jest równe napięciu U_T . Przy obciążeniu napięcie U_{AB} wyliczyć można z zależności:

$$U_{AB} = U_T - I_3 R_T$$

Odpowiedź: bez obciążenia $U_{AB} = 125 \text{ V}$, przy obciążeniu $U_{AB} = 102,5 \text{ V}$.

Zadanie 4.2

Wskazówka: Dla obydwu przypadków obliczyć z prawa Ohma prąd pobierany z dwójnika źródłowego liniowego, a następnie modelując ten dwójnik jako źródło napięciowe o parametrach U_T , R_T napisać równania napięciowe.

Odpowiedź: $U_T = 24 \text{ V}$, $R_T = 3 \Omega$.

Zadanie 4.3

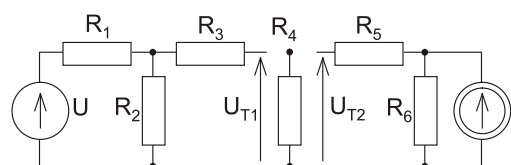
Wskazówka: Na podstawie równości mocy określić stosunek prądów w obydwu przypadkach. Następnie prądy w obu przypadkach określić na podstawie równania oczkowego.

Odpowiedź: $R_w/R = 1,5$.

Zadanie 4.4

Rozwiązanie:

W celu uproszczenia obliczeń wprowadzimy schemat zastępczy obwodu zawierający dwa źródła zastępcze – osobno dla części obwodu znajdującej się po prawej i po lewej stronie rezystora R_4 (rys. 4.4.I).



Rys. 4.4.I

Napięcie U_{T1} jest równe napięciu na rezystorze R_2 , które można obliczyć z dzielnika napięcia:

$$U_{T1} = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 23,3 \text{ V}.$$

Rezystancja wewnętrzna R_{T1} jest równa:

$$R_{T1} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0,267 \Omega.$$

Napięcie U_{T2} jest równe napięciu na rezystorze R_6 :

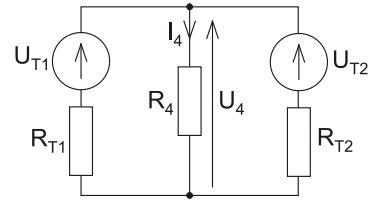
$$U_{T2} = I \cdot R_6 = 21,60 \text{ V.}$$

Rezystancja wewnętrzna R_{T2} jest równa:

$$R_{T2} = R_5 + R_6 = 1,96 \Omega.$$

Napięcie U_4 na rezystorze R_4 w schemacie zastępczym (rys. 4.4.II) można obliczyć metodą potencjałów węzłowych:

$$U_4 = \frac{\frac{U_{T1}}{R_{T1}} + \frac{U_{T2}}{R_{T2}}}{\frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_{T2}} + \frac{1}{R_4}} = 21,42 \text{ V.}$$



Rys. 4.4.II

Poszukiwany prąd w rezystancji: $I_4 = \frac{U_4}{R_4} = 7,14 \text{ A.}$

Odpowiedź: $I_4 = 7,14 \text{ A.}$

Zadanie 4.5

Wskazówka: Wyprowadzić schemat zastępczego źródła napięciowego dla dwóch zewnętrznych gałęzi obwodu (zawierających źródła napięciowe), zaś gałęzie równoległe z rezystorami R_2 , R_3 zastąpić rezystancją zastępczą. Po obliczeniu prądu w tej rezystancji metodą Thevenina ustalić rozptyw prądu między rezystory R_2 , R_3 z zasady dzielnika prądowego.

Odpowiedź: $I_2 = 0,32 \text{ A}$, $I_3 = 0,24 \text{ A}$.

Zadanie 4.6

Wskazówka: Zastąpić układy połączone w trójkąt (R_1 - R_4 , R_5 , R_8) oraz (R_3 - R_7 , R_6 , R_{10}) na równoważne układy połączone w gwiazdę.

Odpowiedź: $I = 2,67 \text{ A}$.

Zadanie 4.7

Rozwiązanie:

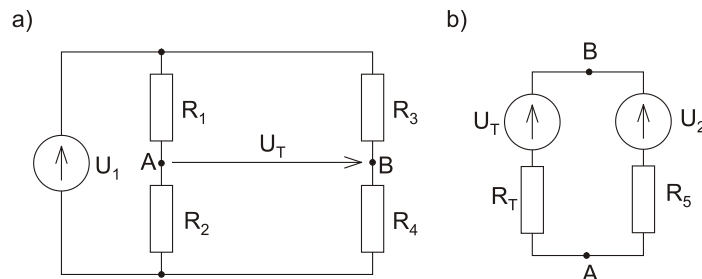
Wprowadzamy schemat zastępczy obwodu z usuniętą gałęzią A-B (rys. 4.7.Ia) i obliczamy napięcie U_T zastępczego źródła napięciowego:

$$U_T = U_1 \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right)$$

Rezystancji R_T nie ma potrzeby obliczać, ponieważ w utworzonym obwodzie zastępczym (rys. 4.7.Ib) prąd w tej gałęzi (U_2 - R_5) nie będzie płynął wtedy, gdy będzie spełniony warunek:

$$U_T = U_2,$$

a zatem wartość rezystancji R_T nie wpływa na rozwiązanie.



Rys. 4.7.I

Podstawiając daną wartość U_2 w miejsce U_T i rozwiązując otrzymane równanie względem R_4 (rys. 4.7.Ib) obliczamy poszukiwaną rezystancję.

Odpowiedź: $R_4=900 \Omega$.

Zadanie 4.8

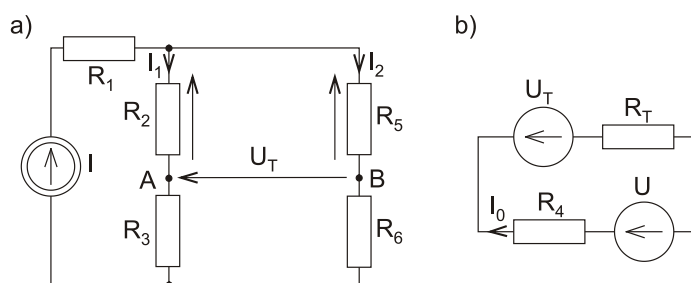
Wskazówka: Zastąpić pozostałą część obwodu (poza rezystorem R_2) zastępczym źródłem napięciowym. Dla powstałego obwodu jednogłęziowego napisać wzór na prąd rezystora R_2 i przyrównać go do wartości danej – z tak powstałego równania wyznaczyć R_2 .

Odpowiedź: $R_2=20 \Omega$.

Zadanie 4.9

Rozwiązanie:

Wprowadzamy schemat zastępczy w postaci źródła Thevenina (rys. 4.9.Ib) dla części obwodu pozbawionej gałęzi zawierającej rezystancję R_4 oraz źródło U .



Rys. 4.9.I

Rezystancja Thevenina widziana z zacisków AB (gałąź ze źródłem prądowym jest rozwarta!) jest równa (rys. 4.9.Ia):

$$R_T = \frac{(R_2 + R_5)(R_3 + R_6)}{R_2 + R_3 + R_5 + R_6} = 45,6 \Omega$$

Napięcie Thevenina można określić z zależności: $U_T = I_2 R_5 - I_1 R_2$, która jest funkcją prądu źródła prądowego I . W celu określenia tej funkcji prądy I_1 i I_2 wyrażamy za pomocą wzorów dla dzielnika prądu:

$$I_1 = I \frac{R_5 + R_6}{R_2 + R_3 + R_5 + R_6} = I \cdot 0,4 \quad I_2 = I \frac{R_2 + R_3}{R_2 + R_3 + R_5 + R_6} = I \cdot 0,6$$

Zatem napięcie Thevenina wyraża się następująco: $U_T = I \cdot 0,6 \cdot R_5 - I \cdot 0,4 \cdot R_2 = -6I$. Do źródła zastępczego dołączmy gałąź zawierającą elementy R_4 oraz U i dla tak powstałego schematu zastępczego całego obwodu piszemy równanie na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa: $U_T + I_0 R_T - U + I_0 R_4 = 0$. Uwzględniając obliczenia przeprowadzone powyżej otrzymujemy: $-6I + 86,4 = 0$. Stąd wynika poszukiwana wartość prądu.

Odpowiedź: $I=14,4 \text{ A}$.

Zadanie 4.10

Rozwiązanie:

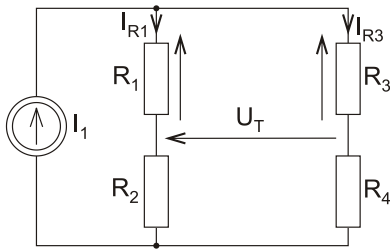
Z obwodu usuwamy gałąź ze źródłem I_2 połączonym równolegle z rezystancją R_5 (rys. 4.10.I) i pozostałą część zastępujemy źródłem Thevenina. Parametry tego źródła będą funkcją

rezystancji R_2 . Przy obliczaniu rezystancji źródła zastępczego należy zastąpić gałąź zawierającą źródło prądowe rozwarciem; stąd:

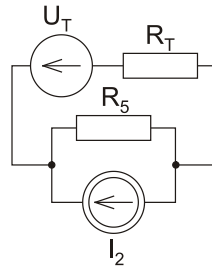
$$R_T = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_2 + R_4} = \frac{15R_2 + 150}{R_2 + 25}$$

$$U_T = I_{R3}R_3 - I_{R1}R_1 =$$

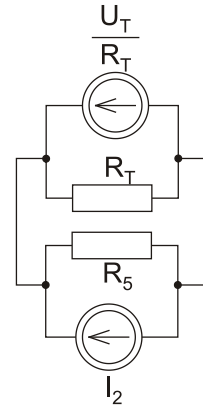
$$I_1 \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} R_3 - I_1 \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} R_1 = \frac{50R_2 - 1000}{R_2 + 25}$$



Rys. 4.10.I



Rys. 4.10.II



Rys. 4.10.III

Usuniętą gałąź łączymy ze źródłem zastępczym (rys. 4.10.II), które następnie zamieniamy na ekwiwalentne źródło prądowe (rys. 4.10.III). Napięcie, o którym mowa w zadaniu, będzie równe zero, jeżeli przez rezystancje R_5 i R_T nie popłyną prądy. Sytuacja taka ma miejsce, gdy suma prądów obu źródeł jest równa zero. Stąd wynika równanie:

$$\frac{U_T}{R_T} + I_2 = 0$$

Po podstawieniu zależności na U_T i R_T otrzymujemy równość

$$\frac{50R_2 - 1000}{15R_2 + 150} + 5 = 0,$$

z której obliczamy poszukiwaną rezystancję.

Odpowiedź: $R_2 = 2 \Omega$.

Zadanie 4.11

Odpowiedź: $I = 1 \text{ A}$.

Zadanie 4.12

Rozwiązanie:

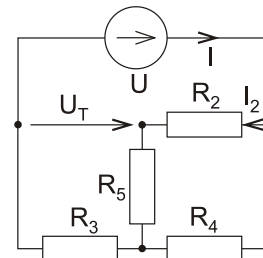
Z obwodu usuwamy rezystor R_1 i do pozostałej części stosujemy tw. Thevenina (rys. 4.12.I). Obliczamy napięcie U_T źródła zastępczego. Do źródła U jest przyłączona wypadkowa rezystancja R_z równa:

$$R_z = R_3 + \frac{R_4(R_5 + R_2)}{R_4 + R_5 + R_2} = 15,47 \Omega$$

Prąd pobierany ze źródła wynosi:

$$I = \frac{U}{R_z} = 6,47 \text{ A}.$$

Prąd rezystancji R_2 obliczamy z zależności dla dzielnika prądu:

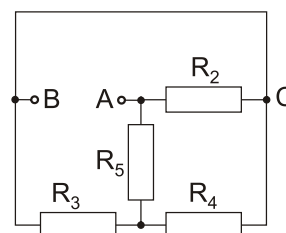


Rys. 4.12.I

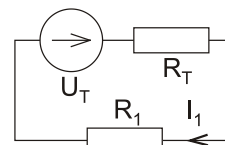
$$I_2 = I \frac{R_4}{R_4 + R_5 + R_2} = 3,76 \text{ A}.$$

Napięcie U_T jest równe: $U_T = U - I_2 R_2 = 62,41 \text{ V}$. W celu obliczenia rezystancji R_T źródła zastępczego (rezystancja między zaciskami A i B) usuwamy z obwodu źródło U pozostawiając zwarte zaciski B i C, do których to źródło było przyłączone (rezystancja wewnętrzna idealnego źródła napięciowego jest równa zero). Rezystancja R_T jest wypadkową rezystancją połączenia równoległego rezystancji R_2 oraz gałęzi zawierającej rezystancję R_5 i szeregowo z nią połączonego równoległego układu rezystancji R_3 i R_4 (patrz rys. 8.12.II):

$$R_T = \frac{R_2 \left(R_5 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right)}{R_2 + R_5 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = 5,49 \Omega.$$



Rys. 4.12.II



Rys. 4.12.III

Korzystając ze schematu zastępczego obwodu (rys. 4.12.III) obliczamy prąd w rezystancji R_1 .

$$I_1 = \frac{U_T}{R_T + R_1} = 3,05 \text{ A}.$$

Następnie kolejno obliczamy pozostałe prądy opierając się na prawach Kirchhoffa (rys. 4.12.IV):

$$I_2 = \frac{U - I_1 R_1}{R_2} = 5,43 \text{ A}, \quad I_5 = I_2 - I_1 = 2,38 \text{ A},$$

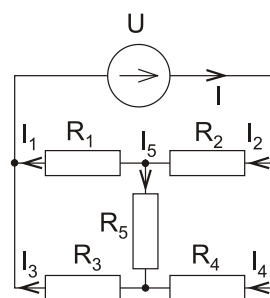
$$I_4 = \frac{I_2 R_2 + I_5 R_5}{R_4} = 2,94 \text{ A},$$

$$I_3 = I_4 + I_5 = 5,32 \text{ A}, \quad I = I_2 + I_4 = 8,37 \text{ A}.$$

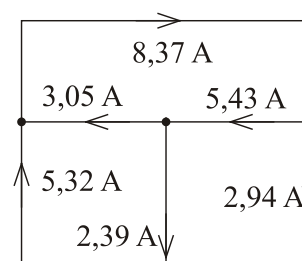
Moc oddawana ze źródła: $P_z = U \cdot I$,
moc pobierana przez odbiorniki:

$$P_{\text{odb}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5.$$

Odpowiedź: $P_z = P_{\text{odb}} = 836,7 \text{ W}$, rozpył prądów przedstawiono na grafie (rys. 4.12.V).



Rys. 4.12.IV

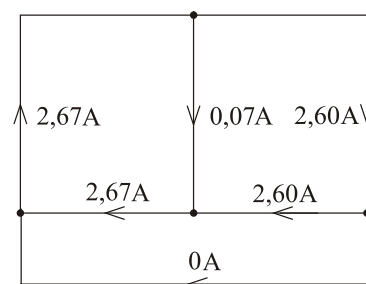


Rys. 4.12.V

Zadanie 4.13

Wskazówka: Prąd płynący przez rezystor R_4 będzie równy zero, jeżeli napięcie zastępczego źródła Thevenina U_T , obliczone na zaciskach rezystora po jego usunięciu, wyniesie 0 V. Do obliczenia wartości tego napięcia w zależności od R_5 w uproszczonym obwodzie (z usuniętą już uprzednio rezystancją R_4) dogodnie jest zastosować ponownie tw. Thevenina.

Odpowiedź: $R_5 = 75 \Omega$, $P_z = P_{\text{odb}} = 1588 \text{ W}$, rozpył prądów przedstawiono na grafie (rys. 4.13.I).



Rys. 4.13.I

Zadanie 4.14

Wskazówka: Korzystając z tw. Thevenina usunąć gałąź z rezystorem R_0 i zastanowić się, dla jakiej wartości rezystancji R_3 napięcie U_T zastępczego źródła napięciowego nie zależy od napięcia U_1 .

Odpowiedź: $R_3=0 \Omega$, $I_0=3,75 \text{ A}$.

Zadanie 4.15

Wskazówka: Do obliczenia napięcia U_T zastępczego źródła Thevenina dogodnie jest wykorzystać metodę superpozycji.

Odpowiedź: $U_T=27,5 \text{ V}$, $R_T=50 \Omega$.

Zadanie 4.16

Odpowiedź: $R_0=407,5 \Omega$.

Zadanie 4.17

Wskazówka: Najłatwiej obliczyć parametry zastępczego źródła napięciowego, jeżeli usuniemy z obwodu gałąź z rezystorem R_4 , tzn. w pierwszej kolejności obliczamy prąd tego rezystora z tw. Thevenina.

Odpowiedź: $I_1=417 \text{ mA}$, $I_2=203 \text{ mA}$, $I_3=197 \text{ mA}$, $I_4=17 \text{ mA}$, $I_6=214 \text{ mA}$, $P_{zr}=P_R=20,7 \text{ W}$.

Zadanie 4.18

Wskazówka: Korzystając z tw. Thevenina usunąć gałąź ze źródłem U_1 i zastąpić pozostałą część obwodu zastępczym źródłem napięciowym. Wartość napięcia tego źródła U_T wyrazić w zależności od szukanego prądu I_0 . Narysować schemat zastępczy służący do obliczenia prądu w usuniętej gałęzi ze źródłem U_1 , sformułować wzór na wartość tego prądu i przyrównać ją do wymaganej w zadaniu wartości 2 A – z powstałego w ten sposób równania wyznaczyć I_0 .

Odpowiedź: $I_0=10 \text{ A}$.

Zadanie 4.19

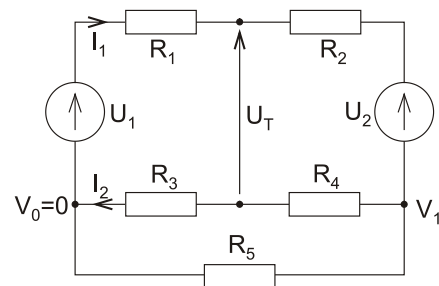
Rozwiązanie: Upraszczamy część obwodu nie zawierającą rezystora R_5 wprowadzając schemat zastępczy Thevenina w postaci źródła napięcia.

W celu obliczenia napięcia U_T rozwiązujemy obwód metodą potencjałów węzłowych. Nieznany potencjał V_1 określa równanie (rys. 4.19.I):

$$V_1 = \frac{\frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2}}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} + \frac{1}{R_5}} = -5,92 \text{ A}$$

Do obliczenia napięcia U_T będą potrzebne wartości prądów płynących przez rezystory R_1 i R_3 :

$$I_1 = \frac{U_1 - U_2 - V_1}{R_1 + R_2} = -2,03 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{V_1}{R_3 + R_4} = -0,85 \text{ A}.$$



Rys. 4.19.I

Napięcie zastępczego źródła wynosi:

$$U_T = U_1 - I_1 R_1 - I_2 R_3 = 12,56 \text{ V}.$$

Rezystancję R_T źródła zastępczego obliczamy po usunięciu z obwodu wszystkich źródeł, które zastępujemy zwarciami. Otrzymana w ten sposób sieć rezystorów zawiera połączenia gwiazdowe i trójkątowe. Aby wyznaczyć rezystancję zastępczą dokonujemy przekształceń trójkąta rezystancji

utworzonego przez rezystory R_3 , R_4 , R_5 na gwiazdę, którą tworzą rezystancje R_{34} , R_{45} , R_{53} (rys. 4.19.II).

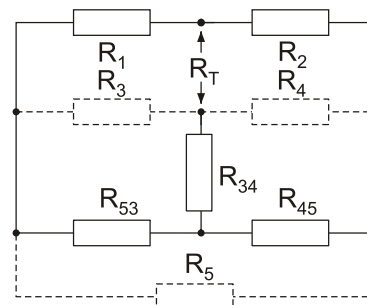
$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = 1 \Omega, \quad R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 1,67 \Omega, \quad R_{53} = \frac{R_5 R_3}{R_3 + R_4 + R_5} = 1,25 \Omega.$$

Rezystancja źródła Thevenina wynosi:

$$R_T = R_{34} + \frac{(R_{53} + R_1)(R_{45} + R_2)}{R_{53} + R_1 + R_{45} + R_2} = 2,39 \Omega.$$

Maksimum mocy w odbiorniku występuje wtedy, gdy jego rezystancja jest równa rezystancji źródła Thevenina: $R_6 = R_T$. W odbiorniku wydzielą się moc:

$$P_{\max} = \frac{U_T^2}{4R_T}$$



Rys. 4.19.II

Odpowiedź: $R_6 = 2,39 \Omega$, $P_{\max} = 16,5 \text{ W}$.

Zadanie 4.20

Odpowiedź: $R_3 = 23,7 \Omega$, $P_{\max} = 42,1 \text{ W}$.

Zadanie 4.21

Odpowiedź: $R_5 = 156 \Omega$, $P_{\max} = 16 \text{ W}$.

Zadanie 4.22

Odpowiedź: $R_5 = 30 \Omega$, $P_{\max} = 0,21 \text{ W}$.

Zadanie 4.23

Odpowiedź: $R_5 = 57,65 \Omega$, $P_{\max} = 0,86 \text{ W}$.

Zadanie 4.24

Odpowiedź: $R_5 = 2,23 \Omega$, $P_{\max} = 0,33 \text{ W}$.

Zadanie 4.25

Odpowiedź: $R = 4 \Omega$, $P_R = 0,25 \text{ W}$.

Zadanie 4.26

Odpowiedź: $R_6 = 1,42 \Omega$, $P_{\max} = 1,47 \text{ kW}$.

Zadanie 4.27

Odpowiedź: $U = 75 \text{ V}$.

Zadanie 4.28

Odpowiedź: $I = 5 \text{ A}$.

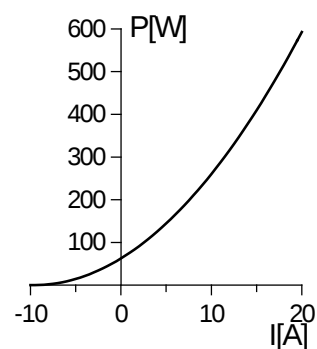
Zadanie 4.29

Odpowiedź: $R_x = 1,77 \Omega$ lub $R_x = 45,83 \Omega$.

Zadanie 4.30

Odpowiedź: $P(I) = 0,676I^2 + 13I + 62,5 [\text{W}]$.

Wykres przedstawiono na rys. 4.30.I.



Rys. 4.30.I

II. OBWODY LINIOWE PRĄDU SINUSOIDALNEGO

5. OBWODY ROZGAŁĘZIONE

PRAWO OHMA I PRAWA KIRCHHOFFA W POSTACI ZESPOLONEJ

Zadanie 5.1

Odpowiedź: $I_1 = 1,90 \text{ A}$, $I_2 = 1,11 \text{ A}$, $I_3 = 1,02 \text{ A}$, bilans mocy $\underline{S}_{\text{źr}} = \underline{S}_{\text{odb}} = 320,8 + j269,2 \text{ V} \cdot \text{A}$.

Zadanie 5.2

Odpowiedź: $i_1(t) = 4,695 \sin(314t + 0,409) \text{ A}$, $i_2(t) = 4,686 \sin(314t + 0,346) \text{ A}$,
 $i_3(t) = 0,294 \sin(314t + 1,917) \text{ A}$, $P = 330 \text{ W}$, $Q = 38 \text{ var}$.

Zadanie 5.3

Rozwiązanie:

Prądy w gałęziach równoległych obwodu obliczamy z prawa Ohma (rys. 5.1.I):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{R_1 + j\omega L} = 2,74 - j1,08 \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = 1,19 + j1,26 \text{ A}.$$

Prąd źródła określa I prawo Kirchhoffa:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 3,94e^{j2,73^\circ} \text{ A}.$$

Napięcie watomierza Wyznaczamy z II prawa Kirchhoffa:

$$\underline{U}_W = \underline{U}_{R1} - \underline{U}_{R2} = \underline{I}_1 R_1 - \underline{I}_2 R_2 = 352,7e^{-j64,72^\circ} \text{ V}.$$

Moc wskazywana przez watomierz jest równa:

$$P_W = U_W I_2 \cos(\arg(\underline{U}_W) - \arg(\underline{I}_2))$$

Moc pozorna źródła wynosi:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$$

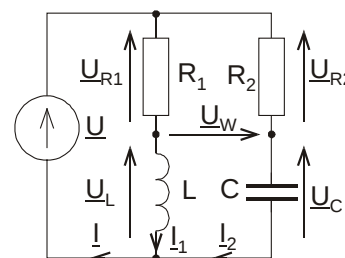
Suma mocy czynnych w odbiornikach jest równa sumie mocy wydzielanych w rezystancjach:

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2.$$

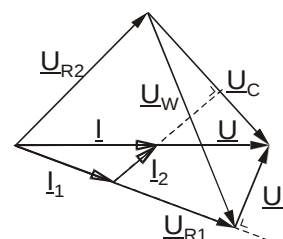
Suma mocy biernych odbiorników jest równa sumie mocy w elementach reaktancyjnych:

$$Q = I_1^2 X_1 - I_2^2 X_2$$

Odpowiedź: $P_W = -224 \text{ W}$, $S = P + jQ = 1495 - j71 \text{ V} \cdot \text{A}$. Wykres fazorowy przedstawia rys. 5.1.II.



Rys. 5.1.I



Rys. 5.4.II

Zadanie 5.4

Rozwiązanie:

Przy opisywaniu obwodu równaniami można pominąć watomierz, jako przyrząd idealny – rys. 5.2.I. Prąd w gałęzi z rezystancją R_1 jest znany – określony przez wydajność prądową źródła $i(t)$. Jego wartość skuteczna zespolona jest równa:

$$\underline{I}_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{j0} \text{ A} = 1,41 \text{ A}$$

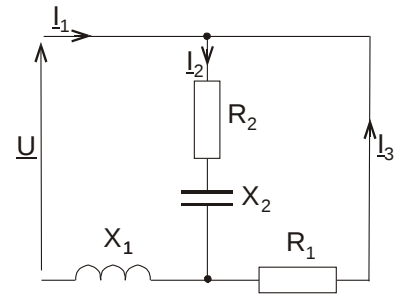
Wartość skuteczna zespolona napięcia źródła napięciowego wynosi:

$$\underline{U} = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ V} = 70,71 e^{j45^\circ} \text{ V}$$

Wartości reaktancji:

$$X_1 = \omega L = 314 \cdot 0,1 = 31,4 \Omega$$

$$X_2 = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 31,85 \Omega.$$



Rys. 5.2.I

W obwodzie są dwa niewiadome prądy, które spełniają następujący układ równań, sformułowany na podstawie praw Kirchhoffa:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{I}_3$$

$$(\underline{R}_2 - jX_2)\underline{I}_2 + jX_1\underline{I}_1 = \underline{U}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań uzyskamy:

$$\underline{I}_1 = -0,43 + j1,90 = 1,95 e^{j102,81^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = -0,43 + j1,90 + 1,41 = 2,14 e^{j62,61^\circ} \text{ A}.$$

Napięcie watomierza obliczamy następująco:

$$\underline{U}_w = (\underline{R}_2 - jX_2)\underline{I}_2 = (50 - j31,85) \cdot 2,14 e^{j62,61^\circ} = 126,65 e^{j30,11^\circ} \text{ V}$$

Moc wskazywana przez watomierz jest równa:

$$P_w = U_w I_1 \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

gdzie: φ_u faza napięcia $\underline{U}_w$, φ_i faza prądu $\underline{I}_1$.

Po podstawieniu danych:

$$P_w = 126,86 \cdot 1,95 \cos(30,11^\circ - 102,81^\circ) = 73,29 \approx 73,3 \text{ W}.$$

Moc pozorna źródła wynosi:

$$\underline{S}_Z = \underline{U} \underline{I}_1^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^*$$

$\underline{U}_3$ jest napięciem źródła prądowego $\underline{I}_3$:

$$\underline{U}_3 = \underline{R}_1 \underline{I}_3 + \underline{U}_w = 10 \cdot 1,41 + 109,62 + j63,85 = 139,07 e^{j27,19^\circ} \text{ V}.$$

Wartość mocy pozornej źródła:

$$\underline{S}_Z = 70,71 e^{j45^\circ} \cdot 1,95 e^{j102,81^\circ} + 139,26 e^{j27,29^\circ} \cdot 1,41 = (248,23 - j26,55) \text{ V} \cdot \text{A}.$$

Całkowita mocy czynna odbiorników jest równa sumie mocy wydzielanych w rezystancjach:

$$P_O = I_3^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 1,41^2 \cdot 10 + 2,14^2 \cdot 50 = 248,23 \text{ W}.$$

Całkowita moc bierna odbiorników jest równa sumie mocy w elementach reaktancyjnych:

$$Q_O = I_1^2 X_1 - I_2^2 X_2 = 1,95^2 \cdot 31,4 - 2,14^2 \cdot 31,85 = -26,55 \text{ Var}.$$

Odpowiedź: Watomierz wskaże 74 W, $\underline{S}_Z = \underline{S}_O \approx (248 - j27) \text{ V} \cdot \text{A}.$

Zadanie 5.5*Rozwiązanie:*

Reaktancje poszczególnych indukcyjności i pojemności wynoszą:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 200 \cdot 0,1 = 20 \, \Omega,$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 200 \cdot 0,15 = 30 \, \Omega,$$

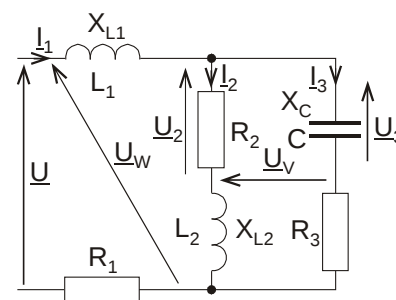
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{200 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 25 \, \Omega.$$

Obwód opisujemy równaniami wynikającymi z praw Kirchhoffa:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$(R_2 + jX_{L2})I_2 = (R_3 - jX_C)I_3$$

$$(R_1 + jX_{L1})I_1 + (R_2 + jX_{L2})I_2 = \underline{U}$$



Rys. 5.3.I

Po podstawieniu danych i uporządkowaniu, otrzymujemy:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$(30 + j30)I_2 - (25 - j25)I_3 = 0$$

$$(20 + j20)I_1 + (30 + j30)I_2 = 410$$

Powyższy układu równań ma następujące rozwiązanie:

$$\underline{I}_1 = 8,17e^{-j20,45^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = 5,23e^{-j70,64^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_3 = 6,27e^{j19,36^\circ} \text{ A}.$$

Napięcie U_V można obliczyć z bilansu napięć w oczku:

$$\underline{U}_V = \underline{U}_3 - \underline{U}_2 = -jX_C I_3 - R_2 I_2 = 0 \text{ V}.$$

Moc watomierza jest określona wzorem:

$$P_W = U_W I_1 \cos \angle(\underline{U}_W, \underline{I}_1) = \Re(\underline{U}_W \cdot \underline{I}_1^*)$$

Napięcie watomierza:

$$\underline{U}_W = \underline{U} - R_1 I_1 = 263,24e^{j12,52^\circ} \text{ V}$$

Wskazanie watomierza:

$$P_W = 263,24 \cdot 8,17 \cdot \cos(12,52^\circ + 20,45^\circ) = 1803 \text{ W}.$$

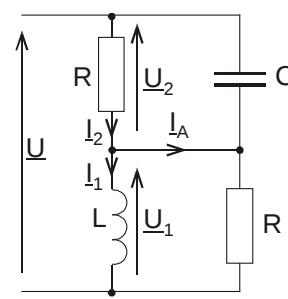
Moc pozorna źródła wynosi:

$$\underline{S}_Z = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* = 410 \cdot (7,65 + j2,85) = (3136,85 + j1169,49) \text{ V} \cdot \text{A}$$

Suma mocy pozornych odbiorników:

$$\begin{aligned} \underline{S}_O &= I_1^2(R_1 + jX_{L1}) + I_2^2(R_2 + jX_{L2}) + I_3^2(R_3 - jX_C) = \\ &= 8,16^2(20 + j20) + 5,22^2(30 + j30) + 6,27^2(25 - j25) = 3136,85 + j1169,49 \text{ V} \cdot \text{A} \end{aligned}$$

Bilans mocy można uznać za zgodny z dokładnością do błędów zaokrągleń.

Odpowiedź: Watomierz wskaże 1803 W, a woltomierz 0 V.**Zadanie 5.6***Rozwiązanie:*Łącznik w pozycji 1.

Napięcie $\underline{U}_1$ na indukcyjności obliczamy z dzielnika napięcia (rys. 5.4.I):

$$\underline{U}_1 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Rys. 5.4.I

gdzie: $\underline{U} = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jU$, $\underline{Z}_1$ jest impedancją zastępczą połączenia równoległego RL:

$$\underline{Z}_1 = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = (0,2 + j0,4)R,$$

a $\underline{Z}_2$ jest impedancją zastępczą połączenia równoległego RC:

$$\underline{Z}_2 = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = (0,5 - j0,5)R.$$

Po podstawieniu tych zależności do wzoru na napięcie i wykonaniu obliczeń uzyskujemy:

$$\underline{U}_1 = (0,2 + j0,6)U.$$

Napięcie $\underline{U}_2$ wynosi:

$$\underline{U}_2 = \underline{U} - \underline{U}_1 = (0,8 - j0,6)U.$$

Obliczamy prądy $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{j\omega L} = (-0,4 - j1,2)\frac{U}{R}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{R} = (-0,6 - j0,8)\frac{U}{R}$$

Prąd amperomierza $\underline{I}_A$, na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa, jest równy:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_2 - \underline{I}_1 = (-0,2 + j0,4)\frac{U}{R}.$$

Łącznik w pozycji 2.

Napięcie $\underline{U}'_2$ na indukcyjności obliczamy z dzielnika napięcia (rys. 5.4.II):

$$\underline{U}'_2 = \underline{U} \frac{R}{R + j\omega L}$$

gdzie: $\underline{U} = -jU$, $R = 2\omega L$.

Po podstawieniu tych zależności do wzoru na napięcie i wykonaniu obliczeń uzyskujemy:

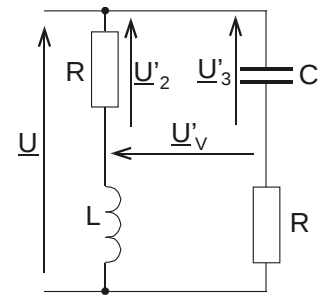
$$\underline{U}'_2 = -0,4(1 + j2)U.$$

Napięcie $\underline{U}'_3$ na pojemności obliczamy także z dzielnika napięcia:

$$\underline{U}'_3 = \underline{U} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = -0,5(1 + j2)U$$

Napięcie na woltomierzu wynosi:

$$\underline{U}_V = \underline{U}'_3 - \underline{U}'_2 = (-0,1 + j0,3)U$$



Rys. 5.4.II

Odpowiedź: Dla $\frac{U}{R} = 5A$ amperomierz wskaże $I_A = 2,24 A$. Dla $U=230 V$ woltomierz wskaże $U_V = 72,73 V$.

Zadanie 5.7

Rozwiązanie:

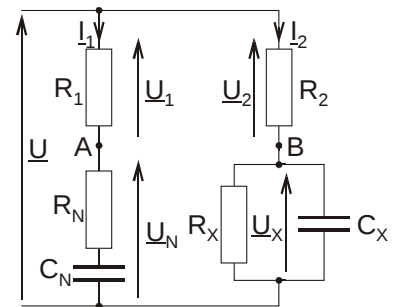
W stanie równowagi przez galwanometr (rys. 5.7) nie płynie prąd, a zatem punkty A i B (rys. 5.5.I) mają jednakowe potencjały i przerwanie połączenia między nimi nie ma wpływu na rozpyw prądów w obwodzie. Oznacza to także równość napięć:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2, \quad \underline{U}_N = \underline{U}_X$$

Posługując się prawem Ohma możemy powyższe równości zapisać następująco:

$$\underline{I}_1 R_1 = \underline{I}_2 R_2$$

$$\underline{I}_1 \underline{Z}_N = \underline{I}_2 \underline{Z}_X$$



Rys. 5.5.I

gdzie $\underline{Z}_N$ jest impedancją szeregowego połączenia $R_N C_N$ a $\underline{Z}_X$ jest impedancją równoległego połączenia $R_X C_X$.

Dzieląc uzyskane równania przez siebie stronami uzyskujemy warunek równowagi:

$$\frac{R_1}{\underline{Z}_N} = \frac{R_2}{\underline{Z}_X}$$

Uzyskaną równość przekształcamy do postaci:

$$\frac{1}{\underline{Z}_X} = \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{\underline{Z}_N}$$

Po uwzględnieniu, że:

$$\underline{Z}_X = \frac{R_X \frac{1}{j\omega C_X}}{R_X + \frac{1}{j\omega C_X}} = \frac{R_X}{1 + j\omega R_X C_X} \quad \underline{Z}_N = R_N - j \frac{1}{\omega C_N}$$

uzyskujemy:

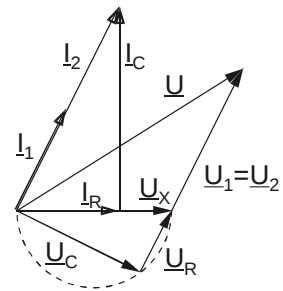
$$\frac{1 + j\omega R_X C_X}{R_X} = \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{R_N + \frac{1}{j\omega C_N}} = \frac{R_1}{R_2} \frac{j\omega C_N}{1 + j\omega R_N C_N} = \frac{R_1}{R_2} \frac{\omega^2 R_N C_N^2 + j\omega C_N}{1 + (\omega R_N C_N)^2}$$

Przyrównując do siebie części rzeczywiste i urojone prawej i lewej strony tego równania otrzymujemy:

$$\frac{1}{R_X} = \frac{R_1}{R_2} \frac{\omega^2 R_N C_N^2}{1 + (\omega R_N C_N)^2}, \quad \omega C_X = \frac{R_1}{R_2} \frac{\omega C_N}{1 + (\omega R_N C_N)^2}.$$

Z tych równań wyznaczamy rezystancję R_X i pojemność C_X .

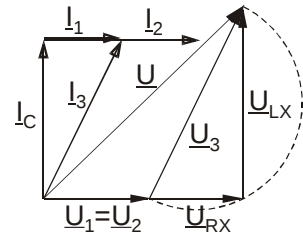
Odpowiedź: $R_x = R_N \frac{R_2}{R_1} \frac{1 + (\omega R_N C_N)^2}{(\omega R_N C_N)^2}$, $C_x = \frac{R_1}{R_2} \frac{C_N}{1 + (\omega R_N C_N)^2}$, wykres fazorowy przedstawia rys. 5.5.II. Narysowano go przyjmując następujące relacje: $R_2 = 2R_1$, $R_1 = \sqrt{5}R_N$, $\omega R_N C_N = 0,5$



Rys. 5.5.II

Zadanie 5.8

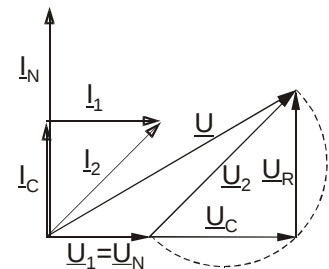
Odpowiedź: $R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1}$, $L_x = R_2 R_3 C$, wykres fazorowy przedstawia rys. 5.6.I. Narysowano go przyjmując następujące relacje: $R_1 = \sqrt{5}R_2$, $R_3 = 4R_2$, $\omega R_1 C = 2$.



Rys. 5.6.I

Zadanie 5.9

Odpowiedź: $C_x = C_N \frac{R_1}{R_2}$, $R_x = R_2 \frac{C_1}{C_N}$, wykres fazorowy przedstawia rys. 5.7.I. Narysowano go przyjmując następujące relacje: $R_2 = \sqrt{2}R_1$, $C_N = 2\sqrt{2}C_1$, $\omega R_1 C_1 = 1$.



Rys. 5.7.I

Zadanie 5.10

Rozwiązanie:

Zadanie można rozwiązać posługując się wyłącznie prawem Ohma i prawami Kirchhoffa w postaci zespolonej. Najpierw obliczymy wartości reaktancji elementów biernych występujących w obwodzie przy pulsacji $\omega = 2\pi f = 314,2 \text{ s}^{-1}$:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 1,89 \Omega, \quad X_{L2} = \omega L_2 = 31,42 \Omega, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = 72,34 \Omega.$$

Prądy trzech gałęzi równoległych są równe:

$$\underline{I}_{L2} = \frac{\underline{U}}{jX_{L2}} = 3,66e^{-j90^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_{R2} = \frac{\underline{U}}{R_2} = 5,75 \text{ A}, \quad \underline{I}_{R1} = \frac{\underline{U}}{R_1 - jX_C} = 1,59e^{j89,21^\circ} \text{ A}.$$

Prąd pobierany ze źródła jest sumą tych prądów: $\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{R2} + \underline{I}_{R1} = 6,13e^{-j19,76^\circ} \text{ A}$.

Napięcie zasilające wynosi: $\underline{U}_Z = \underline{U} + \underline{I}_{L1} jX_{L1} = 119,40e^{j5,23^\circ} \text{ V}$.

Moc pozorna pobierana ze źródła jest równa: $\underline{S}_Z = \underline{U}_Z \underline{I}_{L1}^*$,

a suma mocy pozornych odbiorników wynosi: $\underline{S}_{odb} = \underline{I}_{L1}^2 jX_{L1} + \underline{I}_{R1}^2 (R_1 - jX_C) + \underline{I}_{R2}^2 R_2 + \underline{I}_{L2}^2 jX_{L2}$

Odpowiedź: $\underline{U}_Z = 119,4e^{j5,23^\circ} \text{ V}$, bilans mocy: $P = 663,8 \text{ W}$, $Q = 309,1 \text{ var}$.

Zadanie 5.11

Rozwiązanie:

Watomierz przyłączony w taki sposób, jak w zadaniu, mierzy moc czynną całego obwodu. Jedynym elementem w obwodzie, na którym wydzielą się moc czynna jest rezystancja R . Wskazanie watomierza jest zatem równe mocy wydzielanej w rezystancji R . Prąd przez nią płynący można obliczyć następująco:

$$I_R = \sqrt{\frac{P}{R}} = 8,25 \text{ A}$$

Napięcie na pojemności jest równe sumie napięć na elementach R i L_2 :

$$\underline{U}_C = I_R (R + j\omega L_2) = 113,40 e^{j43,30^\circ} \text{ V}$$

Prąd płynący przez pojemność wynosi:

$$\underline{I}_C = \underline{U}_C j\omega C = 1,78 e^{j133,30^\circ} \text{ A}$$

Prąd pobierany ze źródła jest sumą prądów płynących przez pojemność i przez rezystancję:

$$\underline{I}_Z = \underline{I}_C + \underline{I}_R = 7,15 e^{j10,48^\circ} \text{ A}$$

Napięcie zasilające jest sumą napięć na pojemności i indukcyjności L_1 :

$$\underline{U} = \underline{U}_C + \underline{I}_Z j\omega L_1 = 127 e^{j51,85^\circ} \text{ V}$$

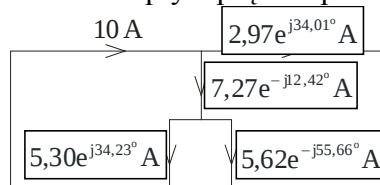
Przy innej wartości napięcia zasilającego moc zmieni się z kwadratem stosunku napięć:

$$P = 681 \left(\frac{U'}{U} \right)^2 = 681 \left(\frac{220}{127} \right)^2 = 2043,8 \text{ W.}$$

Odpowiedź: $U=127 \text{ V}$, $P=2043,8 \text{ W}$.

Zadanie 5.12

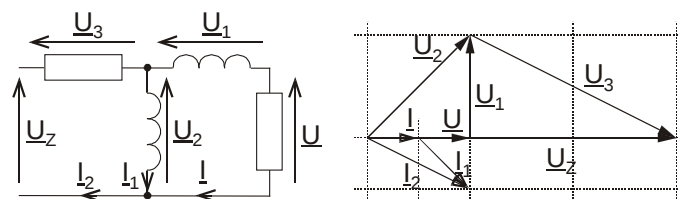
Odpowiedź: $\underline{S}_{\text{zr}} = \underline{S}_{\text{odb}} = 1229 + j829,5 \text{ V} \cdot \text{A}$. Rozpływ prądów podano na grafie obwodu – rys. 5.8.I.



Rys. 5.8.I

Zadanie 5.13

Odpowiedź: $U/U_Z = 0,333$. Wykres fazorowy przedstawia rys. 5.9.I.



Rys. 5.9.I.

Zadanie 5.14

Rozwiązanie:

Zadanie rozwiążemy korzystając z metody podobieństwa. Załóżmy, że napięcie na równoległe połączonych impedancjach $\underline{Z}_2$ i $\underline{Z}_3$ (rys. 5.10.I) wynosi $U_{AB}=1000 \text{ V}$. Prądy tych

impedancji będą wtedy równe:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_2} = 13,33 \text{ A}, \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_3} = 10e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

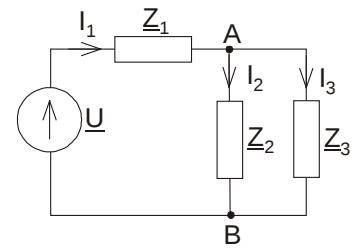
Prąd pobierany ze źródła jest sumą tych prądów:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 16,67e^{j36,87^\circ} \text{ A}.$$

Napięcie zasilające wyniesie: $\underline{U} = \underline{U}_{AB} + \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = 833,33e^{j36,87^\circ} \text{ V}$.

Moc czynna źródła przy takim napięciu będzie równa:

$$P'_Z = \operatorname{Re}\{\underline{U} \underline{I}_1^*\} = 13889 \text{ W}.$$



Rys. 5.10.I

Moc zmienia się z kwadratem stosunku napięć, zatem współczynnik podobieństwa obliczamy jako:

$$k = \sqrt{\frac{P'_Z}{P_Z}} = 1,5.$$

Napięcie zasilające jest przesunięte w fazie względem napięcia $\underline{U}_{AB}$, którego fazę przyjęliśmy wstępnie za zerową, o kąt $\varphi = \arg(\underline{U}) = 38,87^\circ$. Z warunków zadania wynika, że rzeczywiste napięcie zasilające ma fazę początkową równą zero, stąd we współczynniku podobieństwa musimy uwzględnić przesunięcie fazy wszystkich prądów i napięć o kąt $-\varphi$:

$$\underline{k} = k \cdot e^{-j\varphi} = 1,5e^{-j36,87^\circ}.$$

Rzeczywiste prądy i napięcia obliczamy mnożąc ich wartości obliczone powyżej przez współczynnik podobieństwa:

$$\underline{k} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{U}_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1250 + j0 \text{ V} \\ 25 + j0 \text{ A} \\ 16 - j12 \text{ A} \\ 9 + j12 \text{ A} \\ 1200 - j900 \text{ V} \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: $\underline{U} = 1250 \text{ V}$, $\underline{U} = 1250 \text{ V}$, $\underline{U}_{AB} = 1500e^{-j36,87^\circ} \text{ V}$, $\underline{U}_{AB} = 1500 \text{ V}$,

$\underline{I}_1 = 25 \text{ A}$, $\underline{I}_2 = 20e^{-j36,87^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_2 = 20 \text{ A}$, $\underline{I}_3 = 15e^{j53,13^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_3 = 15 \text{ A}$.

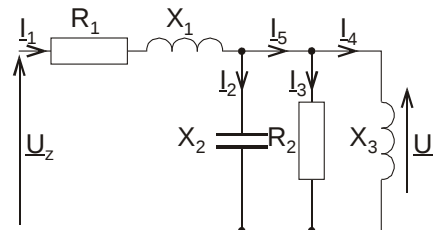
Zadanie 5.15

Rozwiązanie:

Stosujemy metodę podobieństwa. Zakładamy że napięcie na reaktancji X_3 (rys. 5.11.I) jest równe $\underline{U} = 100 \text{ V}$. Prądy trzech gałęzi równoległych są wtedy równe:

$$\underline{I}'_4 = \frac{\underline{U}}{jX_3} = 5,56e^{-j90^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}'_3 = \frac{\underline{U}}{R_2} = 8,33 \text{ A},$$

$$\underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}}{-jX_2} = 3,33e^{j90^\circ} \text{ A}.$$



Rys. 5.11.I

Prąd pobierany ze źródła i prąd watomierza obliczamy na podstawie I prawa Kirchhoffa:

$$\underline{I}'_1 = \underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 + \underline{I}'_4 = 8,62e^{-j14,92^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}'_5 = \underline{I}'_3 + \underline{I}'_4 = 10,02e^{-j33,72^\circ} \text{ A}.$$

Napięcie zasilania wyniesie:

$$\underline{U}'_Z = \underline{U} + \underline{I}'_1 (R_1 + jX_1) = 113,70e^{j7,30^\circ} \text{ V}.$$

Moc czynna pobierana ze źródła oraz moc wskazywana przez watomierz będzie w tych warunkach równa:

$$P'_z = \operatorname{Re}\{\underline{U}_z \underline{I}_4^*\} = 859,57 \text{ W}, \quad P'_w = \operatorname{Re}\{\underline{U}_z \underline{I}_1^*\} = 907,72 \text{ W}$$

Moc zmienia się z kwadratem stosunku napięć, zatem współczynnik podobieństwa obliczamy jako:

$$k = \sqrt{\frac{P_w}{P'_w}} = 0,476.$$

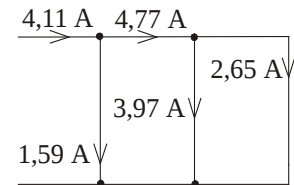
Rzeczywiste wartości skuteczne prądów i napięcia zasilającego obliczamy mnożąc wartości skuteczne tych wielkości, obliczone powyżej, przez współczynnik podobieństwa:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ I'_3 \\ I'_4 \end{bmatrix}, \quad U_z = k U'_z.$$

Rzeczywistą wartość mocy czynnej źródła uzyskamy mnożąc wartość obliczoną powyżej przez kwadrat współczynnika podobieństwa:

$$P_z = k^2 P'_z$$

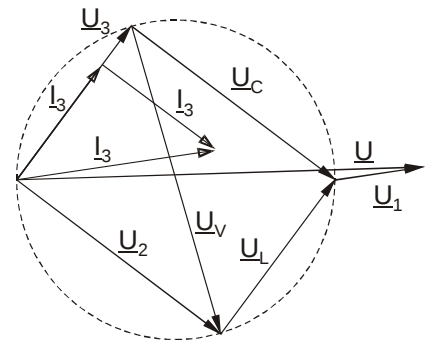
Odpowiedź: $U_z=54,1 \text{ V}$, $P_z=205,9 \text{ W}$, wartości skuteczne prądów podano na grafie obwodu – rys. 5.11.II.



Rys. 5.11.II

Zadanie 5.16

Odpowiedź: $U=64 \text{ V}$, wskazania przyrządów
 $U_V=50 \text{ V}$, $P_w=180 \text{ W}$,
 moc układu $P+jQ=180 + 20 \text{ V} \cdot \text{A}$.
 Wykres fazorowy przedstawia rys. 5.12.I.



Rys. 5.12.I

Zadanie 5.17

Rozwiązanie:

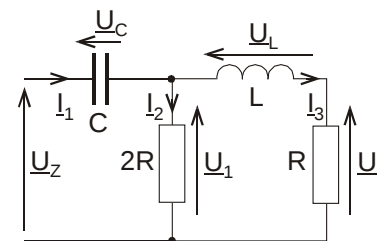
Wszystkie wartości prądów i napięć można wyrazić poprzez napięcie $\underline{U}$ (rys. 5.13.I):

- prąd $\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{R}$

- napięcie $\underline{U}_1 = \underline{U} + \underline{I}_3 j\omega L = \underline{U} \left(1 + \frac{j\omega L}{R} \right)$

- prąd $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{2R} = \frac{\underline{U}}{2R} \left(1 + \frac{j\omega L}{R} \right)$

- prąd $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{2R} \left(1 + \frac{j\omega L}{R} \right) + \frac{\underline{U}}{R} = \frac{\underline{U}}{R} \left(1,5 + \frac{j\omega L}{2R} \right)$



Rys. 5.13.I

$$\begin{aligned}
 - \text{ napięcie zasilające } \underline{U}_Z &= \underline{U}_1 + \underline{I}_1 \left(-j \frac{1}{\omega C} \right) = \underline{U} \left(1 + \frac{j\omega L}{R} \right) + \frac{\underline{U}}{R} \left(1,5 + \frac{j\omega L}{2R} \right) \left(-j \frac{1}{\omega C} \right) = \\
 &= \underline{U} \left[1 + \frac{L}{2R^2 C} + j \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1,5}{\omega RC} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Jeżeli napięcia $\underline{U}$ i $\underline{U}_Z$ są ze sobą w fazie, to ich stosunek

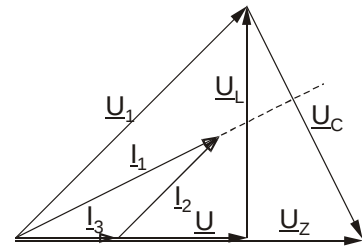
$$\frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}} = \left[1 + \frac{L}{2R^2 C} + j \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1,5}{\omega RC} \right) \right]$$

jest liczbą rzeczywistą. Prowadzi to do warunku

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}} \right\} = \frac{\omega L}{R} - \frac{1,5}{\omega RC} = 0,$$

z którego można obliczyć poszukiwaną indukcyjność L .

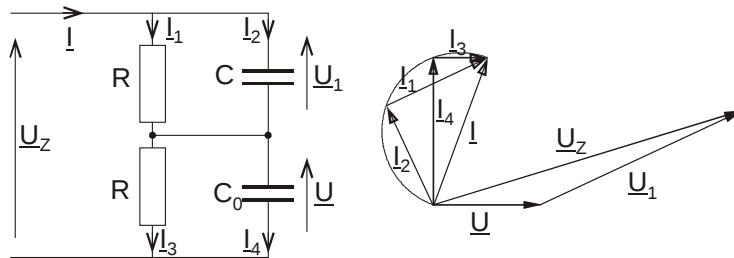
Odpowiedź: $L = \frac{1,5}{\omega^2 C}$. Wykres fazorowy przedstawia rys. 5.13.II



Rys. 5.13.II

Zadanie 5.18

Odpowiedź: $\frac{C_0}{C} = 2,74$. Wykres fazorowy przedstawia rys. 5.14.I



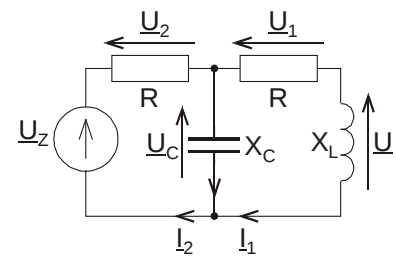
Rys. 5.14.I

Zadanie 5.19

Rozwiązanie:

Korzystając z metody podobieństwa piszemy równanie wiążące napięcia $\underline{U}_Z$ i $\underline{U}$ (rys. 5.15.I):

- prąd indukcyjności $\frac{\underline{U}}{jX_L}$,
- napięcie na pojemności jest sumą napięć na rezystancji i indukcyjności $\frac{\underline{U}}{jX_L} R + \underline{U}$,
- prąd pojemności $\left(\frac{\underline{U}}{jX_L} R + \underline{U} \right) \frac{1}{-jX_C}$,
- prąd źródła jest sumą prądów indukcyjności i pojemności $\left(\frac{\underline{U}}{jX_L} R + \underline{U} \right) \frac{1}{-jX_C} + \frac{\underline{U}}{jX_L}$,
- napięcie zasilające jest sumą napięć na rezystancjach i indukcyjności



Rys. 5.15.I

$$\underline{U}_Z = \left[\left(\frac{\underline{U}}{jX_L} R + \underline{U} \right) \frac{1}{-jX_C} + \frac{\underline{U}}{jX_L} \right] R + \frac{\underline{U}}{jX_L} R + \underline{U}.$$

Po dokonaniu przekształceń:

$$\underline{U}_Z = \underline{U} \left[\frac{R^2}{X_L X_C} + 1 + j \left(\frac{R}{X_C} - \frac{2R}{X_L} \right) \right].$$

Jeżeli napięcie $\underline{U}$ wyprzedza $\underline{U}_Z$ o kąt 45° , to stosunek $\frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}}$ jest liczbą zespoloną o argumencie równym -45° . W takim przypadku część rzeczywista tej liczby jest równa części urojonej ze znakiem przeciwnym:

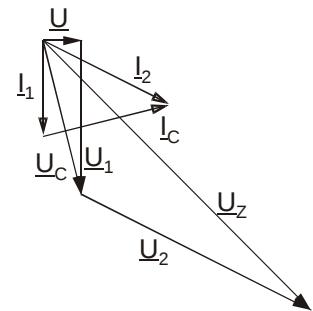
$$\frac{R^2}{X_L X_C} + 1 = -\frac{R}{X_C} + \frac{2R}{X_L}.$$

Z tej równości wynika zależność na reaktancję X_C :

$$X_C = \frac{R^2 + R X_L}{2R - X_L},$$

w której należy uwzględnić daną w zadaniu równość $R=4X_L$.

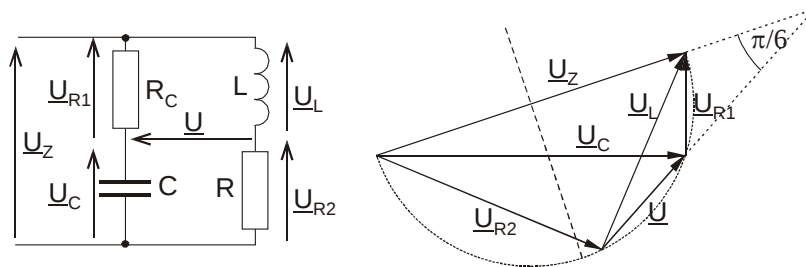
Odpowiedź: $X_C=2,86X_L$. Wykres fazorowy przedstawiono na rys. 5.15.II



Rys. 5.15.II

Zadanie 5.20

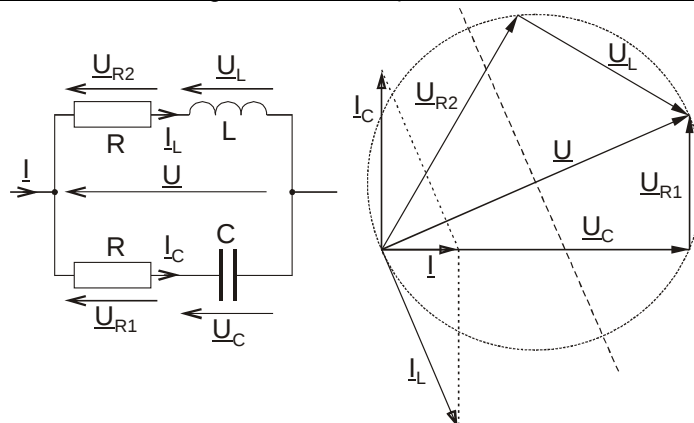
Odpowiedź: $\frac{R}{\omega L} = 1,13$. Wykres fazorowy przedstawiono na rys. 5.16.I.



Rys. 5.16.I

Zadanie 5.21

Odpowiedź: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - 2\left(\frac{R}{L}\right)^2}$. Wykres fazorowy przedstawiono na rys. 5.17.I.

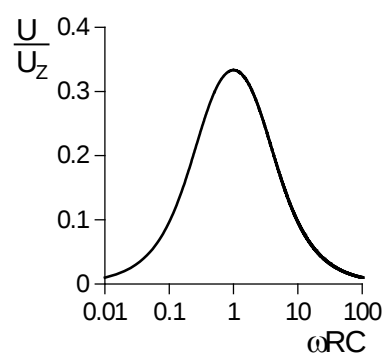


Rys. 5.17.I

Zadanie 5.22

Odpowiedź: $\frac{U}{U_Z} = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{1 - (\omega RC)^2}{\omega RC} \right)^2}}.$

Wykres funkcji przedstawia rys. 5.18.I.



Rys. 5.18.I

Zadanie 5.23

Odpowiedź: stosunek amplitud $\frac{U_m}{U_{Zm}} = 0,37$, przesunięcie fazowe $\varphi = 68,2^\circ$.

Zadanie 5.24

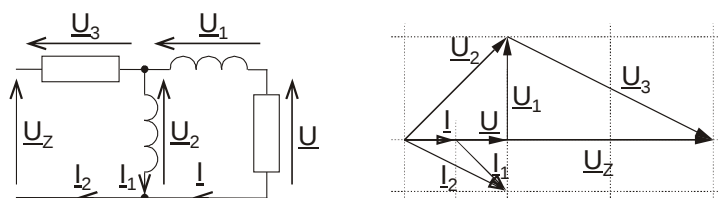
Odpowiedź: $\frac{U}{U_Z} = 0,01$, $\varphi = -153^\circ$

Zadanie 5.25

Odpowiedź: $\underline{Z} = j \frac{1}{\omega C}.$

Zadanie 5.26

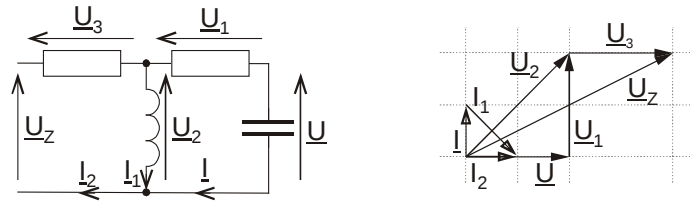
Odpowiedź: $U/U_Z = 0,333$. Wykres fazorowy przedstawia rys. 5.19.I.



Rys. 5.19.I

Zadanie 5.27

Odpowiedź: $U/U_Z = 0,447$, $\underline{U}_Z$ wyprzedza $\underline{U}$ o kąt $26,57^\circ$. Wykres fazorowy przedstawia rys. 5.20.I.



Rys. 5.20.I.

Zadanie 5.28

Odpowiedź: $R_3 = 30 \Omega$.

Zadanie 5.29

Odpowiedź: $R = \frac{\sqrt{6}}{\omega C}$.

6. REZONANS W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH

Zadanie 6.1

Rozwiązanie:

Pulsacja rezonansowa szeregowego obwodu RLC jest określona wzorem:

$$\omega_r = 2\pi f_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a dobroć jest równa:

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}$$

Po pomnożeniu powyższych wzorów stronami uzyskuje się:

$$2\pi f_r Q = \frac{1}{RC}$$

Stąd pojemność wynosi:

$$C = \frac{1}{2\pi f_r QR}$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru na pulsację rezonansową i odpowiednich przekształceniach otrzymuje się wzór określający indukcyjność:

$$L = \frac{QR}{2\pi f_r}$$

Odpowiedź: $L = 3,7 \text{ mH}$, $C = 3 \text{ }\mu\text{F}$.

Zadanie 6.2

Odpowiedź: $L = 12,8 \text{ mH}$, $R = 2411 \text{ }\Omega$.

Zadanie 6.3

Rozwiązanie:

Impedancja obwodu (rys. 6.3.I) jest równa:

$$\underline{Z} = j\omega L + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j \left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right).$$

Przyrównując część urojoną impedancji do zera, przy założeniu $\omega > 0$, wyznaczamy pulsację i częstotliwość rezonansową:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{R^2 C}}, \quad f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$$

Rezonans zachodzi, gdy tak obliczona pulsacja jest wartością rzeczywistą – wartość wyrażenia pod pierwiastkiem musi być większa od zera:

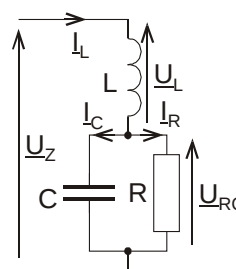
$$1 - \frac{L}{R^2 C} > 0.$$

Stąd wynika warunek dla rezystancji:

$$R > \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

W stanie rezonansu impedancja obwodu ma tylko część rzeczywistą:

$$Z_r = \frac{R}{1 + \omega_r^2 R^2 C^2}.$$



Rys. 6.3.I

Po podstawieniu zależności na pulsację rezonansową i dokonaniu uproszczeń otrzymujemy:

$$Z_r = \frac{L}{RC}.$$

Dobroć obwodu określamy z zależności:

$$Q = \omega_r \frac{W}{P},$$

gdzie: W – energia zgromadzona w obwodzie w polu elektrycznym i magnetycznym, P – moc czynna tracona w obwodzie. Ze względu na cykliczną wymianę energii między cewką i kondensatorem, najdogodniej jest określić ją w chwili, gdy jest ona w całości zgromadzona w jednym z tych elementów. Następuje to w momencie, gdy energia w indukcyjności jest maksymalna, a zatem i jej prąd osiąga wartość maksymalną:

$$W = \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Biorąc pod uwagę, że wartość skuteczna prądu sinusoidalnego jest równa: $I = I_{\max}/\sqrt{2}$, wyrażenie na energię można przekształcić do postaci: $W = LI^2$

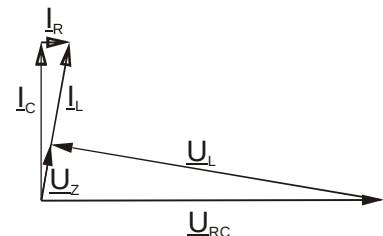
Moc czynna tracona w obwodzie może być rozważana jako moc tracona w zastępczym rezystorze o rezystancji Z_r : $P = I^2 Z_r$. Wstawiając te zależności do wzoru na dobroć otrzymujemy:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{R^2 C}} \frac{LI^2}{I^2 \frac{L}{RC}} = \sqrt{\frac{R^2 C}{L}} - 1$$

Stosunek napięcia na indukcyjności do napięcia zasilającego obliczamy następująco:

$$\frac{U_L}{U_Z} = \frac{I \cdot \omega_r L}{I \cdot Z_r} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{R^2 C}} \frac{L}{\frac{L}{RC}} = \sqrt{\frac{R^2 C}{L}} - 1 = Q$$

Odpowiedź: $f_r = 150,45 \text{ Hz}$, $Z_r = 4,08 \text{ } \Omega$, $Q = 5,33$, $U_L/U_Z = 5,33$, warunek zaistnienia rezonansu $R > 22,12 \text{ } \Omega$, wykres fazorowy przedstawia rys. 6.3.II



Rys. 6.3.II

Zadanie 6.4

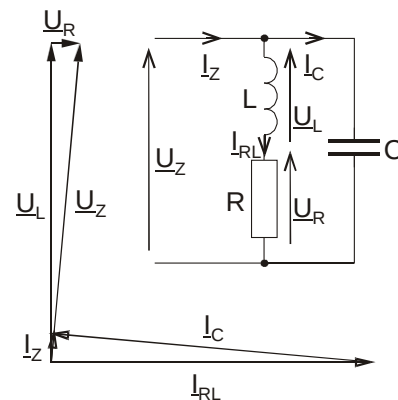
Odpowiedź: $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} = 900,65 \text{ Hz}$,

$$Z_r = \frac{L}{RC} = 206,67 \text{ } \Omega,$$

$$Q = \frac{I_C}{I} = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} - 1 = 11,7, \text{ warunek zaistnienia}$$

$$\text{rezonansu } R < \sqrt{\frac{L}{C}} = 17,61 \text{ } \Omega, \text{ wykres}$$

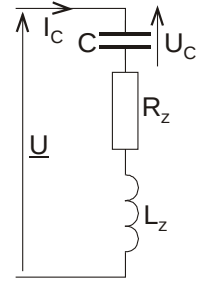
fazorowy przedstawia rys. 6.4.I.



Rys. 6.4.I

Zadanie 6.5*Rozwiązanie:*

W rozwiązaniu zostanie wykorzystany szeregowy schemat zastępczy układu równoległego RL. W obwodzie z rys. 6.5 równoległy układ RL zostaje zastąpiony równoważnym układem szeregowym $R_z L_z$ - rys. 6.5.I. Rezystancja R_z i indukcyjność L_z układu zastępczego należy dobrać tak, aby równoważność obu schematów zachodziła przy częstotliwości rezonansowej. Przy spełnieniu tego warunku, obwody z rys. 6.5 i 6.5.I mają jednakowe częstotliwości rezonansowe, impedancje w stanie rezonansu i dobroci. Z porównania impedancji obu równoważnych schematów wynika następująca zależność:



Rys. 6.5.I

$$\frac{Rj\omega_r L}{R + j\omega_r L} = R_z + j\omega_r L_z$$

Lewą stronę tej równości przekształca się następująco:

$$\frac{Rj\omega_r L}{R + j\omega_r L} = \frac{Rj\omega_r L}{R + j\omega_r L} \frac{R - j\omega_r L}{R - j\omega_r L} = \frac{R^2 j\omega_r L + R\omega_r^2 L^2}{R^2 + \omega_r^2 L^2} = \frac{R\omega_r^2 L^2}{R^2 + \omega_r^2 L^2} + j \frac{R^2 \omega_r L}{R^2 + \omega_r^2 L^2}$$

W wyniku porównania części rzeczywistych i urojonych prawych stron obu powyższych równości otrzymuje się wartości parametrów schematu zastępczego:

$$R_z = \frac{R\omega_r^2 L^2}{R^2 + \omega_r^2 L^2}, \quad L_z = \frac{R^2 L}{R^2 + \omega_r^2 L^2}$$

Pulsacja rezonansowa obu obwodów jest jednakowa, stąd można ją obliczyć korzystając ze wzoru dla obwodu szeregowego:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_z C}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2 L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} C}}$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{\frac{R^2 L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} C}$$

Po przekształceniach:

$$\omega_r^2 R^2 L C = R^2 + \omega_r^2 L^2$$

Ostatecznie:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{L^2}{R^2}}} = \frac{1}{\sqrt{LC} \sqrt{1 - \frac{L}{R^2 C}}}$$

Różnica pod pierwiastkiem musi być dodatnia, z czego wynika warunek dla zaistnienia rezonansu:

$$1 - \frac{L}{R^2 C} > 0 \Rightarrow R > \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Impedancje w stanie rezonansu obu obwodów są jednakowe. Dla obwodu szeregowego całkowita impedancja w stanie rezonansu jest równa rezystancji R_z , wobec tego:

$$Z_r = R_z = \frac{R\omega_r^2 L^2}{R^2 + \omega_r^2 L^2} = \frac{R \frac{1}{LC - \frac{L^2}{R^2}} L^2}{R^2 + \frac{1}{LC - \frac{L^2}{R^2}} L^2} = \frac{\frac{RL^2}{LC - \frac{L^2}{R^2}}}{\frac{R^2 LC + L^2 - L^2}{LC - \frac{L^2}{R^2}}} = \frac{L}{RC}$$

Dobroć obwodu z rys. 6.5 oblicza się również ze wzoru dla układu z rys. 6.5.I.

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L_z}{C}}}{R_z} = \sqrt{L_z \frac{1}{C} \frac{1}{R_z^2}} = \sqrt{\frac{R^2 L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} \frac{1}{C} \frac{(R^2 + \omega_r^2 L^2)^2}{R^2 \omega_r^4 L^4}}$$

Po dokonaniu uproszczeń:

$$Q = \sqrt{\frac{1}{C} \frac{R^2 + \omega_r^2 L^2}{\omega_r^4 L^3}} = \sqrt{\frac{1}{C} \frac{LC - \frac{L^2}{R^2}}{\left(LC - \frac{L^2}{R^2}\right)^2 L^3}} = \sqrt{\frac{1}{C} \frac{LC - \frac{L^2}{R^2}}{\left(LC - \frac{L^2}{R^2}\right)^2 L^3}} = \sqrt{\frac{R^2 LC - L^2 + L^2}{LC - \frac{L^2}{R^2}}} = \sqrt{\frac{R^2 C - L}{L}}$$

Napięcie na pojemności:

$$U_C = I_C \frac{1}{\omega_r C} = \frac{U_Z}{Z_r} \frac{1}{\omega_r C} = \frac{U_Z}{\frac{L}{RC}} \sqrt{LC - \frac{L^2}{R^2}} \frac{1}{C} = U_Z \sqrt{\frac{R^2 C}{L} - 1} = U_Z Q$$

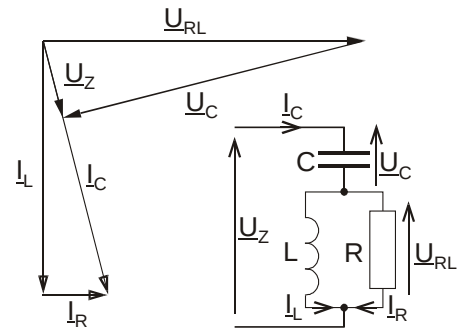
Odpowiedź: $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L}{R^2 C}}} = 60,1 \text{ Hz},$

$$Z_r = \frac{L}{RC} = 30,91 \Omega, Q = \frac{U_C}{U_Z} = \sqrt{\frac{R^2 C}{L} - 1} = 3,9,$$

warunek zaistnienia rezonansu

$$R > \sqrt{\frac{L}{C}} = 124,32 \Omega, \text{ wykres fazorowy}$$

przedstawia rys. 6.5.II.



Rys. 6.5.II

Zadanie 6.6

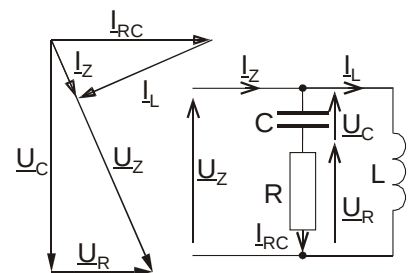
Odpowiedź: $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}} = 349 \text{ Hz},$

$$Z_r = \frac{L}{RC} = 620 \Omega, Q = \frac{I_L}{I} = \sqrt{\frac{L}{R^2 C} - 1} = 2,28,$$

warunek zaistnienia rezonansu

$$R < \sqrt{\frac{L}{C}} = 249 \Omega, \text{ wykres fazorowy}$$

przedstawiono na rys. 6.6.I



Rys. 6.6.I

Zadanie 6.7

Rozwiązanie:

Admitancja obwodu (rys. 6.7.I) jest równa:

$$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1}} + j\omega C_2 = j \frac{\omega C_1 + \omega C_2 - \omega^3 L C_1 C_2}{1 - \omega^2 L C_1}$$

Przyrównując część urojoną admitancji do zera otrzymujemy warunek na pierwszą pulsację rezonansową:

$$\omega_1 C_1 + \omega_1 C_2 - \omega_1^3 L C_1 C_2 = 0$$

Odrzucamy rozwiązanie zerowe. Drugim rozwiązaniem jest:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}$$

Przy tej pulsacji zachodzi rezonans prądów.

Impedancja obwodu jest równa:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = -j \frac{1 - \omega^2 L C_1}{\omega C_1 + \omega C_2 - \omega^3 L C_1 C_2}$$

Przyrównując część urojoną impedancji do zera otrzymujemy warunek na drugą pulsację rezonansową:

$$1 - \omega_2^2 L C_1 = 0$$

skąd wynika rozwiązanie:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L C_1}}$$

Przy tej pulsacji zachodzi rezonans napięć.

Ze wzorów określających pulsacje rezonansowe wynika, że $\omega_1 > \omega_2$.

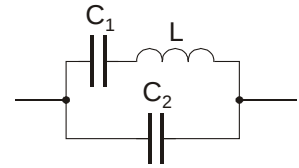
Wykres funkcji

$$f(\omega) = \text{Im}(\underline{Z}) = \frac{\omega^2 L C_1 - 1}{\omega C_1 + \omega C_2 - \omega^3 L C_1 C_2} = \frac{L C_1 \left(\omega^2 - \frac{1}{L C_1} \right)}{\omega L C_1 C_2 \left(\frac{C_1 + C_2}{L C_1 C_2} - \omega^2 \right)} = \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega C_2 (\omega_1^2 - \omega^2)}$$

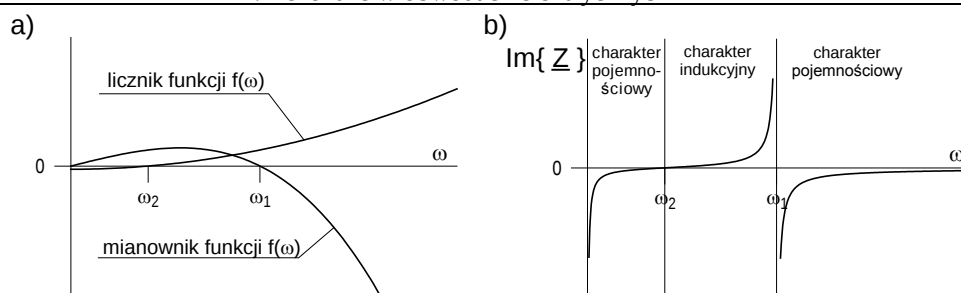
można sporządzić szkicując oddzielnie przebiegi funkcji licznika i mianownika. Licznik jest funkcją kwadratową przecinającą oś pulsacji dla $\omega = \pm \omega_2$, a mianownik wielomianem trzeciego stopnia posiadającym zera dla $\omega = 0$ i $\omega = \pm \omega_1$ – rys. 6.7.IIa przedstawia te funkcje dla $\omega \geq 0$. Z postaci tych funkcji wynikają następujące cechy przebiegu funkcji $f(\omega)$:

1. dla $\omega = 0$ funkcja $f(\omega)$ posiada asymptotę pionową i $f(\omega) \rightarrow -\infty$ dla $\omega \rightarrow 0^+$,
2. dla $\omega = \omega_2$ funkcja $f(\omega)$ przechodzi przez zero,
3. dla $\omega = \omega_1$ funkcja $f(\omega)$ posiada asymptotę pionową i $f(\omega) \rightarrow \infty$ dla $\omega \rightarrow \omega_1^-$ oraz $f(\omega) \rightarrow -\infty$ dla $\omega \rightarrow \omega_1^+$,
4. $f(\omega) \rightarrow 0$ dla $\omega \rightarrow \infty$.

W przedziałach, w których wartości funkcji $f(\omega)$ są ujemne, obwód ma charakter pojemnościowy, a gdy wartości funkcji są dodatnie, charakter indukcyjny.



Rys. 6.7.I



Rys. 6.7.II

Odpowiedź: $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}$ – rezonans prądów,

$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$ – rezonans napięć.

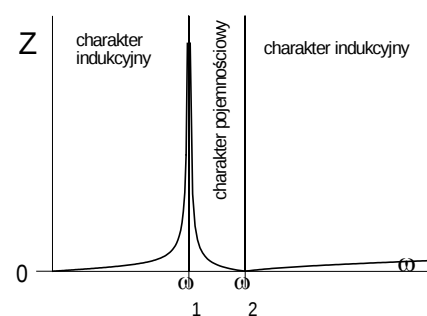
Wykres przedstawiono na rys. 6.7.IIb.

Zadanie 6.8

Odpowiedź: $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ – rezonans prądów,

$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – rezonans napięć.

Wykres przedstawiono na rys. 6.8.I.



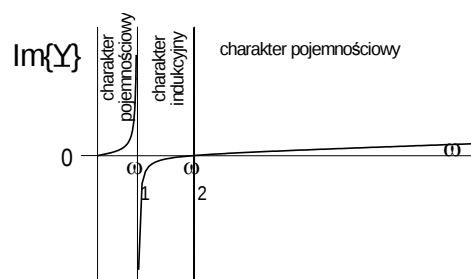
Rys. 6.8.I

Zadanie 6.9

Odpowiedź: $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}$ – rezonans napięć,

$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}$ – rezonans prądów.

Wykres przedstawiono na rys. 6.9.I.



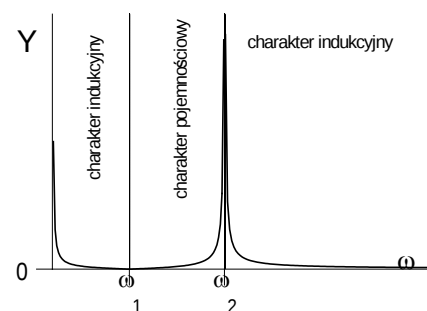
Rys. 6.9.I

Zadanie 6.10

Odpowiedź: $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$ – rezonans prądów,

$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} C}}$ – rezonans napięć,

Wykres przedstawiono na rys. 6.10.I.



Rys. 6.10.I

Zadanie 6.11*Rozwiązanie:*

Źródło oddaje do obwodu jedynie moc czynną, gdy jest obciążone opornością czynną. W obwodzie rozważanym w zadaniu taka sytuacja zachodzi w stanie rezonansu, kiedy część urojona całkowitej impedancji obwodu jest równa zero. Możemy zatem wykorzystać otrzymaną w rozwiązaniu zadania 6.5 zależność, wiążącą parametry obwodu z pulsacją napięcia zasilającego, która jest pulsacją rezonansową:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{L^2}{R^2}}}$$

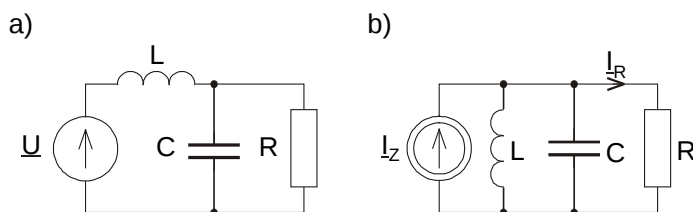
Po jej przekształceniu otrzymujemy równość określającą poszukiwaną wartość pojemności:

$$C = \frac{L}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Odpowiedź: $C=250 \mu\text{F}$.

Zadanie 6.12*Rozwiązanie:*

Wartość zespolona napięcia zasilającego układ (rys. 6.12.Ia) jest równa $\underline{U}=100 \text{ V}$.



Rys. 6.12.I

Źródło napięciowe z impedancją $j\omega L$ zastępujemy równoważnym źródłem prądowym o prądzie:

$$\underline{I}_Z = \frac{\underline{U}}{j\omega L} = -j20 \text{ A}.$$

Obwód przybiera postać, jak na rys. 6.12.Ib. Maksimum mocy czynnej obwodu jest równoważne maksymalnej mocy wydzielanej na rezystancji R , która jest jedynym odbiornikiem mocy czynnej. Moc wydzielana na rezystancji osiąga maksimum, gdy płynie przez nią największy prąd. W obwodzie z rys. 6.12.Ib sytuacja taka ma miejsce w stanie rezonansu prądów, gdyż wtedy prądy indukcyjności i pojemności wzajemnie się znoszą (mają te same wartości skuteczne i przeciwne fazy) i prąd w rezystancji jest równy prądowi pobieranemu ze źródła: $\underline{I}_R = \underline{I}_Z$. W obwodzie równoległym RLC pulsacja rezonansowa jest określona zależnością:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Przekształcając tę zależność obliczamy poszukiwaną pojemność:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L}$$

Maksymalna moc czynna pobierana ze źródła jest równa:

$$P_{\max} = I_R^2 R = I_Z^2 R$$

Należy podkreślić, że rezonans w obu obwodach na rys. 6.12.I nie zachodzi przy tej samej częstotliwości (por. rozwiązanie zad. 6.3).

Odpowiedź: $C=200 \mu\text{F}$, $P_{\max}=4 \text{ kW}$.

7. OBWODY JEDNOFAZOWE

Zadanie 7.1

Rozwiązanie:

Rozwiązanie poprzez analizę trójkąta mocy.

Zakładamy, zgodnie z warunkami zadania, że odbiornik pracuje w warunkach znamionowych (rys. 7.1.I), tzn:

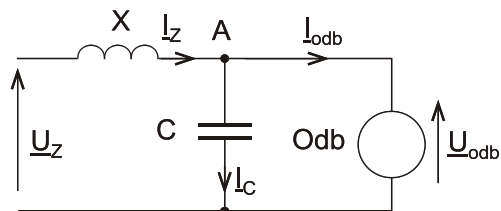
$$\underline{U}_{\text{odb}} = \underline{U}_n = 220e^{j0^\circ} \text{ V},$$

$$P_{\text{odb}} = P_n = 1000 \text{ W},$$

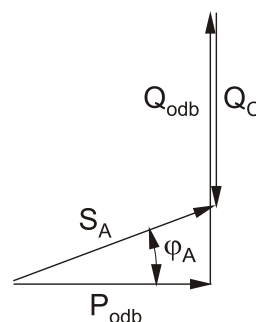
$$Q_{\text{odb}} = Q_n = P_n \cdot \tan \varphi_n = 1732 \text{ var}.$$

Prąd odbiornika w tych warunkach wynosi:

$$\underline{I}_{\text{odb}} = \underline{I}_n = \frac{P_n}{U_n \cdot \cos \varphi_n} e^{j(0^\circ - \varphi_n)} = 9,09 e^{-j60^\circ} \text{ A} = (4,55 - j7,87) \text{ A}.$$



Rys. 7.1.I



Rys. 7.1.II

Napięcie na kondensatorze jest równe napięciu na odbiorniku:

$$\underline{U}_C = \underline{U}_n.$$

Moc bierną kondensatora można wyrazić wzorem:

$$Q_C = \frac{U_C^2}{X_C} = U_C^2 \cdot \omega \cdot C.$$

Aby uzyskać zadany współczynnik mocy w miejscu A obwodu, stosunek sumarycznej mocy biernej do sumarycznej mocy czynnej elementów obwodu leżących za tym miejscem (patrząc od strony zasilania) – czyli odbiornika i kondensatora – musi być równy tangensowi kąta φ_A :

$$\frac{Q_{\text{odb}} - Q_C}{P_{\text{odb}}} = \tan \varphi_A$$

(znak minus wynika z ujemnej mocy biernej kondensatora), co przedstawiono na wykresie fazorowym mocy na rys. 7.1.II, tzw. trójkąt mocy:

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$C = \frac{Q_{\text{odb}} - P_{\text{odb}} \cdot \tan \varphi_A}{U_C^2 \cdot \omega} = 82,1 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 82,1 \mu\text{F}.$$

Reaktancja kondensatora wynosi:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = 38,79 \Omega.$$

Prąd płynący przez kondensator jest równy:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{-jX_C} = 5,67e^{j90^\circ} \text{ A} = j5,67 \text{ A}.$$

Prąd zasilania wynosi:

$$\underline{I}_Z = \underline{I}_{odb} + \underline{I}_C = 5,05e^{-j25,8^\circ} \text{ A} = (4,55 - j2,2) \text{ A}.$$

Napięcie zasilania obliczamy z zależności:

$$\underline{U}_Z = \underline{U}_{odb} + jX \cdot \underline{I}_Z = 222,3e^{j1,2^\circ} \text{ V} = (222,2 + j4,55) \text{ V}.$$

Odpowiedź: $C=82,1 \mu\text{F}$, $U_Z=222,3 \text{ V}$.

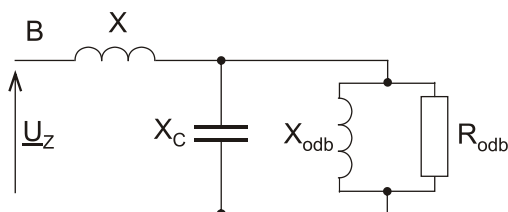
Zadanie 7.2

Rozwiązanie:

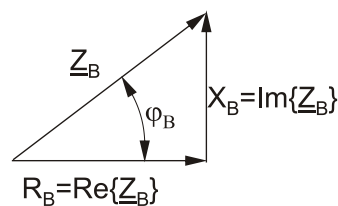
Metoda I - Rozwiązanie poprzez analizę impedancji obwodu.

Obliczamy parametry schematu zastępczego odbiornika (rys. 7.2.I), przyjmując np. schemat równoległy R_{odb} , X_{odb} . Przy takim układzie połączeń obliczamy parametry następująco:

$$R_{odb} = \frac{U_n^2}{P_n} = 48,4 \Omega \quad X_{odb} = \frac{U_n^2}{Q_n} = \frac{U_n^2}{P_n \cdot \operatorname{tg} \varphi_n} = 27,94 \Omega.$$



Rys. 7.2.I



Rys. 7.2.II

Admitancja układu kondensator-odbiornik wynosi:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_{odb}} + \frac{1}{jX_{odb}} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{R_{odb}} + j \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_{odb}} \right) = 0,02066 + j \left(\frac{1}{X_C} - 0,03579 \right),$$

gdzie X_C jest reaktancją kondensatora. Wprowadzając zmienną pomocniczą:

$$a = \frac{1}{X_C} = \omega \cdot C$$

otrzymujemy:

$$\underline{Y}_1 = 0,02066 + j(a - 0,03579).$$

Impedancja obwodu w miejscu B jest równa:

$$\underline{Z}_B = jX + \frac{1}{\underline{Y}_1} = j1 + \frac{1}{0,02066 + j(a - 0,03579)} \cong \frac{0,02066 + j(a^2 - 1,0716 \cdot a + 0,0375)}{a^2 - 0,07158 \cdot a + 0,001708}.$$

Aby współczynnik mocy obwodu w miejscu B był równy zadanej wartości $\cos \varphi_B$, stosunek wypadkowej reaktancji (część urojona impedancji) obwodu, widzianej z miejsca B (tzn. z zacisków zasilania), do wypadkowej rezystancji (część rzeczywista impedancji), musi być równy tangensowi kąta φ_B (rys. 7.2.II):

$$\frac{X_B}{R_B} = \operatorname{tg} \varphi_B;$$

stąd:

$$\frac{a^2 - 1,0716 \cdot a + 0,0375}{0,02066} = 0.$$

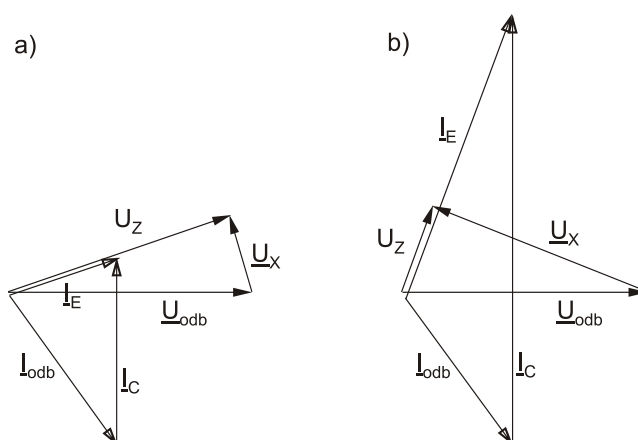
Po rozwiązaniu równania kwadratowego otrzymujemy dwa pierwiastki:

$$a_1 = 0,0362, \quad a_2 = 1,0354,$$

co prowadzi do dwóch wartości pojemności C , przy których spełnione są warunki zadania:

$$C_1 = 115 \mu\text{F}, \quad C_2 = 3,3 \text{ mF};$$

(praktyczne znaczenie ma pierwsza – mniejsza – wartość pojemności). Na rys. 7.2.III przedstawiono wykresy fazorowe prądów i napięć dla obydwu rozwiązań.



Rys. 7.2.III

Metoda II - Rozwiązanie poprzez analizę trójkąta mocy.

Zakładamy, zgodnie z warunkami zadania, że odbiornik pracuje w warunkach znamionowych (patrz rys. 7.1.I), tzn:

$$\underline{U}_{odb} = \underline{U}_n = 220e^{j0^\circ} \text{ V},$$

$$P_{odb} = P_n = 1000 \text{ W},$$

$$Q_{odb} = Q_n = P_n \cdot \operatorname{tg} \varphi_n = 1732 \text{ var. .}$$

Prąd odbiornika w tych warunkach wynosi:

$$\underline{I}_{odb} = \underline{I}_n = \frac{P_n}{U_n \cdot \cos \varphi_n} e^{j(0^\circ - \varphi_n)} = 9,09e^{-j60^\circ} \text{ A} = (4,55 - j7,87) \text{ A}.$$

Napięcie na kondensatorze jest równe napięciu na odbiorniku:

$$\underline{U}_C = \underline{U}_n.$$

Moc bierną kondensatora można wyrazić wzorem:

$$Q_C = \frac{U_C^2}{X_C} = U_C^2 \cdot \omega \cdot C.$$

Aby uzyskać zadany współczynnik mocy w miejscu B obwodu, stosunek sumarycznej mocy biernej do sumarycznej mocy czynnej elementów obwodu leżących za tym miejscem (patrząc od strony zasilania) – czyli odbiornika i kondensatora – musi być równy tangensowi kąta φ_A :

$$\frac{Q_{\text{odb}} + Q_X - Q_C}{P_{\text{odb}}} = \operatorname{tg} \varphi_B$$

(znak minus wynika z ujemnej mocy bierniej kondensatora), co przedstawiono na wykresie fazorowym mocy na rys. 7.2.IV, tzw. trójkąt mocy:

W tym przypadku moc bierną Q_X w szeregowo włączonej indukcyjności można obliczyć jako:

$$Q_X = I_Z^2 \cdot X,$$

gdzie prąd I_Z jest sumą prądów odbiornika i kondensatora, przy czym drugi z nich zależy od wartości pojemności C :

$$I_Z = I_{\text{odb}} + I_C.$$

przy czym:

$$I_C = \frac{U_C}{-jX_C} = j\omega C U_C = j314 \cdot 220 \cdot C.$$

Wprowadzając zmienną pomocniczą:

$$b = 314 \cdot 220 \cdot C$$

otrzymujemy:

$$I_Z = I_{\text{odb}} + I_C = 4,55 + j(b - 7,87).$$

Zatem moc bierna Q_X wyniesie:

$$Q_X = 20,7 + b^2 - 15,74 \cdot b + 61,94 = b^2 - 15,74 \cdot b + 82,64,$$

natomiast moc bierną kondensatora Q_C można również wyrazić korzystając ze zmiennej pomocniczej b :

$$Q_C = U_C^2 \cdot \omega \cdot C = 220 \cdot b.$$

Po przekształceniach otrzymamy zatem:

$$Q_{\text{odb}} + b^2 - 15,74 \cdot b + 82,64 - 220 \cdot b = P_{\text{odb}} \cdot \operatorname{tg} \varphi_B$$

zaś po podstawieniu danych liczbowych:

$$b^2 - 235,74 \cdot b + 1814,6 = 0$$

Po rozwiązaniu równania kwadratowego otrzymujemy dwa pierwiastki:

$$b_1 = 7,967 \quad b_2 = 227,77$$

co prowadzi do dwóch wartości pojemności C , przy których spełnione są warunki zadania:

$$C_1 = 115 \mu\text{F}, \quad C_2 = 3,3 \text{ mF};$$

Odpowiedź: $C_1 = 115 \mu\text{F}$ lub $C_2 = 3,3 \text{ mF}$.

Wykres fazorowy prądów i napięć dla pojemności C_1 przedstawiono na rys. 7.2.III.a, zaś dla pojemności C_2 – na rys. 7.2.III.b.

Zadanie 7.3

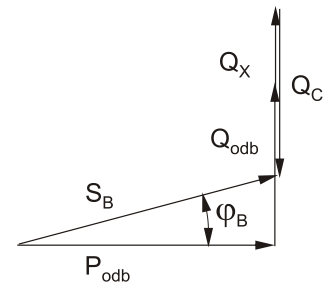
Wskazówka: Zadanie można rozwiązać analogicznie do rozwiązania zadania 7.1.

Odpowiedź: $C = 46,9 \mu\text{F}$, $U_Z = 234,5 \text{ V}$.

Zadanie 7.4

Wskazówka: Zadanie można rozwiązać analogicznie do rozwiązania zadania 7.2. W przypadku rozwiązania poprzez analizę trójkąta mocy zwrócić uwagę, że moc tracona w rezystorze jest mocą czynną.

Odpowiedź: $C = 51,9 \mu\text{F}$.



Rys. 7.2.IV

Zadanie 7.5

Wskazówka: Zadanie można rozwiązać analogicznie do rozwiązania zadania 7.1, jednak przy analizie trójkąta mocy należy również uwzględnić moc bierną elementu indukcyjnego.

Odpowiedź: $C=67,85 \mu\text{F}$, $U_Z=245,2 \text{ V}$.

Zadanie 7.6

Wskazówka: Zadanie można rozwiązać analogicznie do rozwiązania zadania 7.1, jednak przy analizie trójkąta mocy należy uwzględnić moce (czynne i bierne) obydwu odbiorników. Przy obliczeniu rzeczywistych mocy odbiorników wykorzystać fakt, że moc odbiornika jest proporcjonalna do napięcia w drugiej potęgze (patrz: rozwiązanie zadania 7.8).

Odpowiedź: $C=130 \mu\text{F}$, $P_1=826 \text{ W}$, $P_2=1169 \text{ W}$.

Zadanie 7.7

Wskazówka: Wyznaczenie pojemności przeprowadzamy analogicznie jak w zadaniu 7.2; przy metodzie opartej na analizie impedancji uwzględniamy impedancję obydwu odbiorników, przy metodzie wykorzystującej analizę trójkąta mocy sumujemy odpowiednio moce czynne i bierne obydwu odbiorników. Po wyznaczeniu pojemności należy obliczyć rzeczywistą wartość napięcia na odbiornikach – przy obliczaniu rzeczywistych mocy odbiorników wykorzystać fakt, że moc odbiornika jest proporcjonalna do napięcia w drugiej potęgze (patrz: rozwiązanie zadania 7.8).

Odpowiedź: $\cos\varphi_A=0,994$, $P_1=694,6 \text{ W}$, $P_2=1910,3 \text{ W}$.

Zadanie 7.8

Rozwiązanie:

Rozwiązanie poprzez analizę trójkąta mocy.

Zakładamy wstępnie – wbrew warunkom zadania, że odbiornik 2 pracuje w warunkach znamionowych (rys. 7.8.I), tzn:

$$\underline{U}'_{O2} = \underline{U}_{2n} = 660e^{j0^\circ} \text{ V},$$

$$P'_{O2} = P_{2n} = 1000 \text{ W},$$

$$Q'_{O2} = Q_{2n} = P_{2n} \cdot \tan\varphi_2 = 1732 \text{ var}.$$

Prąd tego odbiornika w tych warunkach wynosiłby:

$$\underline{I}'_{O2} = \underline{I}_{2n} = \frac{P_{2n}}{U_n \cdot \cos\varphi_n} e^{j(0^\circ - \varphi_2)} = 35,24 e^{-j30,68^\circ} \text{ A} = (30,30 - j17,98) \text{ A}.$$

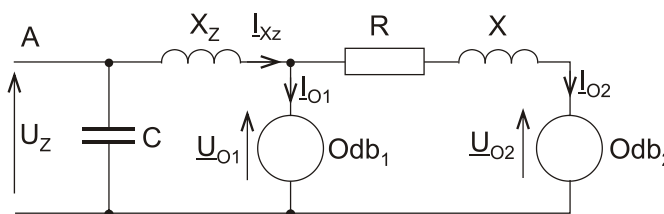
Napięcie na odbiorniku pierwszym byłoby wówczas równe:

$$\underline{U}'_{O1} = \underline{U}'_{O2} + \underline{I}'_{O2} \cdot (R + jX) = 660 + (30,30 - j17,98) \cdot (0,3 + j0,4) = 676,3 e^{j0,57^\circ}.$$

W rzeczywistości odbiornik 1 pracuje w warunkach znamionowych, tzn. przy napięciu równym:

$$\underline{U}_{O1} = \underline{U}_{1n} = 660 e^{j0,57^\circ} \text{ V}$$

(dla wygody dalszych obliczeń kąt fazowy napięcia $\underline{U}_{O1}$ pozostawiamy jako zgodny z dotychczasowymi obliczeniami). Zatem w warunkach zadania rzeczywiste wartości prądu i napięcia odbiornika 2 będą niższe niż wstępnie założyliśmy – ze względu na liniowość obwodu, proporcjonalnie do stopnia zmniejszenia napięcia na odbiorniku pierwszym. Współczynnik podobieństwa (proporcjonalności) wyniesie:



Rys. 7.8.I

$$\underline{k} = \frac{\underline{U}_{O1}}{\underline{U}'_{O1}} = \frac{660e^{j0,57^\circ}}{676,3e^{j0,57^\circ}} = 0,9759$$

(dzięki pozostawieniu niezmiennego w stosunku do założeń kąta fazowego, stał się on liczbą rzeczywistą), zatem rzeczywiste wartości napięcia i prądu odbiornika 2 wyniosą:

$$\underline{U}_{O2} = \underline{U}'_{O2} \cdot \underline{k} = 641,1e^{j0^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{I}_{O2} = \underline{I}'_{O2} \cdot \underline{k} = 34,385e^{-j30,68^\circ} \text{ A},$$

natomiast moce – czynna i bierna – odbiornika 2 będą niższe w stosunku do zakładanych wstępnie wartości znamionowych proporcjonalnie do kwadratu współczynnika podobieństwa.:

$$P_{O2} = P'_{O2} \cdot k^2 = 19046 \text{ W},$$

$$Q_{O2} = Q'_{O2} \cdot k^2 = 11301 \text{ var}.$$

Moc czynna i bierna, tracone odpowiednio w elementach R i X, wynoszą:

$$P_R = I_{O2}^2 \cdot R = 34,385^2 \cdot 0,3 = 355 \text{ W},$$

$$Q_X = I_{O2}^2 \cdot X = 34,385^2 \cdot 0,4 = 473 \text{ var}.$$

Odbiornik 1 pracuje w warunkach znamionowych, zatem jego moc czynna i bierna wynoszą odpowiednio:

$$P_{O1} = P_{1n} = 30000 \text{ W},$$

$$Q_{O1} = Q_{1n} = P_{1n} \cdot \tan \varphi_1 = 24068 \text{ var}.$$

Prąd odbiornika 1 jest równy:

$$\underline{I}_{O1} = \frac{P_{1n}}{\underline{U}_{1n} \cdot \cos \varphi_1} e^{j(0,57^\circ - \varphi_1)} = \frac{30000}{660 \cdot 0,78} e^{-j38,17^\circ} = 58,275e^{-j38,17^\circ} \text{ A} = (45,815 - j36,013) \text{ A}$$

(uwaga: dla napięcia $\underline{U}_{O1}$ założyliśmy uprzednio kąt fazowy $0,57^\circ$ – różny od zera; trzeba to uwzględnić w obliczeniach). Sumaryczny prąd płynący przez reaktancję X_Z wynosi:

$$\underline{I}_{X_Z} = \underline{I}_{O1} + \underline{I}_{O2} = 92,475e^{-j35,39^\circ} \text{ A} = (75,39 - j53,56) \text{ A}.$$

Napięcie zasilania i napięcie na kondensatorze wynosi:

$$\underline{U}_Z = \underline{U}_{O1} + \underline{I}_{X_Z} \cdot jX_Z = 660e^{j0,57^\circ} + 92,475e^{-j35,39^\circ} \cdot j0,5 = 688,2e^{j3,69^\circ} \text{ V},$$

natomiast moc bierna w elemencie indukcyjnym o reaktancji X_Z wyniesie:

$$Q_{X_Z} = I_{X_Z}^2 \cdot X_Z = 92,475^2 \cdot 0,5 = 4276 \text{ var}.$$

Pojemność obliczamy z trójkąta mocy (rys. 7.8.II):

$$\frac{Q_{O1} + Q_{O2} + Q_X + Q_{X_Z} - Q_C}{P_{O1} + P_{O2} + P_R} = \tan \varphi_A,$$

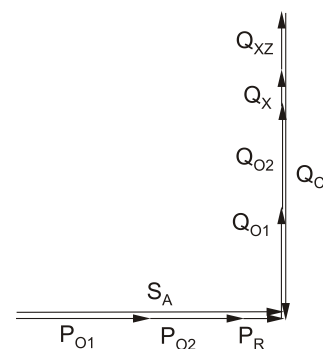
gdzie:

$$Q_C = \frac{U_Z^2}{X_C} = U_Z^2 \cdot \omega \cdot C,$$

przy czym z warunków zadania: $\cos \varphi = 1$ wynika, że kąt $\varphi_A = 0$, zatem $\tan \varphi_A = 0$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$C = \frac{Q_{O1} + Q_{O2} + Q_X + Q_{X_Z}}{U_Z^2 \cdot \omega} = \frac{24068 + 11301 + 473 + 4276}{688,2^2 \cdot 314} = 269,8 \mu\text{F} \approx 270 \mu\text{F}.$$

Odpowiedź: $C=270 \mu\text{F}$, $U_z=688,2 \text{ V}$, $P_2=19,046 \text{ kW}$.



Rys. 7.8.II

Zadanie 7.9*Rozwiązanie:*

Zakładamy, że odbiornik pracuje w warunkach znamionowych, tzn.:

$$\underline{U}_{\text{odb}} = \underline{U}_n = 380e^{j0^\circ} \text{ V.}$$

Wynikają stąd następujące wartości prądu oraz mocy pobieranych przez odbiornik:

$$I_{\text{odb}} = I_n = \frac{P_n}{U_n \cdot \cos \varphi_n} e^{j(0^\circ - \varphi_n)} = 32,89e^{-j36,87^\circ} \text{ A,}$$

$$P_{\text{odb}} = P_n = 10000 \text{ W,}$$

$$Q_{\text{odb}} = Q_n = P_n \cdot \tan \varphi_n = 7500 \text{ var.}$$

Prąd w odbiorniku wywołuje straty mocy czynnej w rezystancji R i mocy biernej w reaktancji X (rys. 7.9.I), równe odpowiednio:

$$P_R = I_{\text{odb}}^2 \cdot R = 649 \text{ W,} \quad Q_X = I_{\text{odb}}^2 \cdot X = 865 \text{ var.}$$

Aby uzyskać zadany współczynnik mocy $\cos \varphi_A$ w miejscu A obwodu, stosunek sumarycznej mocy biernej do sumarycznej mocy czynnej elementów obwodu leżących za tym punktem (patrząc od strony zasilania) musi być równy tangensowi kąta φ_A (rys. 7.9.II), czyli:

$$\frac{Q_{\text{odb}} + Q_X - Q_C}{P_{\text{odb}} + P_R} = \tan \varphi_A,$$

gdzie moc bierną kondensatora możemy wyrazić zależnością:

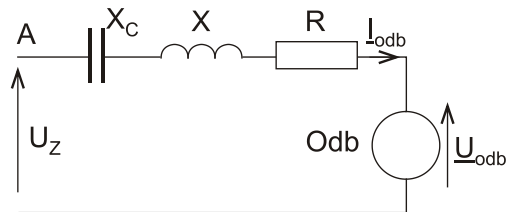
$$Q_C = I_{\text{odb}}^2 \cdot X_C,$$

przy czym X_C jest reaktancją kondensatora. Stąd:

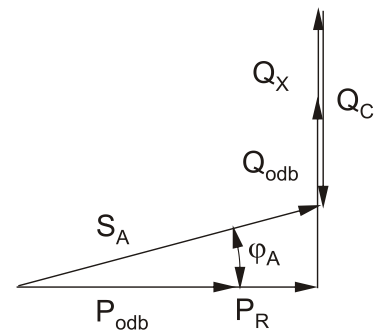
$$X_C = \frac{Q_{\text{odb}} + Q_X - (P_{\text{odb}} + P_R) \cdot \tan \varphi_A}{I_{\text{odb}}^2} = 5,734 \Omega,$$

zatem:

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = 555,4 \mu\text{F.}$$



Rys. 7.9.I



Rys. 7.9.II

Napięcie zasilania obliczamy z napięciowego prawa Kirchhoffa:

$$\underline{U}_Z = \underline{U}_{\text{odb}} + I_{\text{odb}} \cdot (R + jX - jX_C) = 330,4e^{-j25,37^\circ} \text{ V} = (298,5 - j141,5) \text{ V.}$$

Odpowiedź: $C=555 \mu\text{F}$, $U_Z=330,4 \text{ V}$.**Zadanie 7.10**

Wskazówka: Założyć, że na odbiorniku jest napięcie o znamionowej wartości, obliczyć prąd odbiornika. Postępując podobnie jak przy metodzie podobieństwa, sformułować wzór na napięcie zasilania (będzie ono zależne od reaktancji kondensatora), a następnie wyznaczyć moduł tego napięcia i przyrównać go do znamionowej wartości napięcia odbiornika. Z tak otrzymanego równania obliczamy reaktancję kondensatora. Po jej podstawieniu do wzoru na napięcie zasilania (w postaci zespolonej) uzyskuje się kąt fazowy tego napięcia (jako argument liczby zespolonej). Różnica kątów fazowych napięcia i prądu zasilania jest szukanym kątem φ_A .

Odpowiedź: rozwiązanie 1: $C=1,967 \text{ mF}$, $\cos \varphi_A=0,733$ (charakter indukcyjny obwodu)
rozwiązanie 2: $C=137,2 \mu\text{F}$, $\cos \varphi_A=0,733$ (charakter pojemnościowy obwodu)

Zadanie 7.11

Wskazówka: Zagadnienie podobne jak w zadaniu 7.4, należy jednak uwzględnić moce i prądy obydwu odbiorników. Jeżeli zatem jeden z nich pracuje w warunkach znamionowych, napięcie na drugim nie ma wartości znamionowej (dla tego odbiornika), więc jego moce i prąd będą miały także wartości różne od znamionowych. Przy obliczeniu rzeczywistych mocy odbiorników wykorzystać fakt, że moc odbiornika jest proporcjonalna do napięcia w drugiej potęgze (patrz: rozwiązanie zadania 7.8).

Odpowiedź: $C=116 \mu\text{F}$, $P_1=4069 \text{ W}$, $P_2=5209 \text{ W}$. Zakładając pojemnościowy charakter obwodu po kompensacji uzyskuje się jeszcze dwie inne wartości pojemności: $C=296,1 \mu\text{F}$ oraz $C=9,805 \text{ mF}$ (przypadek ten ma charakter teoretyczny, w praktyce nie stosuje się tego typu kompensacji).

Zadanie 7.12

Wskazówka: Zagadnienie podobne jak w zadaniu 7.4, należy jednak uwzględnić moce i prądy obydwu odbiorników, zwracając uwagę, że mają one różne napięcia znamionowe. Jeżeli zatem pierwszy odbiornik pracuje w warunkach znamionowych, napięcie na drugim nie ma wartości znamionowej (dla tego odbiornika), więc jego moce i prąd będą miały także wartości różne od znamionowych – należy je przeliczyć, korzystając z faktu, że prąd zmienia się proporcjonalnie do zmian napięcia, zaś moce – do zmian napięcia w drugiej potęgze (patrz: rozwiązanie zadania 7.8).

Odpowiedź: $C=13,9 \mu\text{F}$, $U_z=1053 \text{ V}$.

Zadanie 7.13

Wskazówka: Zagadnienie podobne jak w zadaniu 7.8, w wersji uproszczonej, gdyż przy braku impedancji rozdzielającej obydwie odbiorniki pracują one przy tej samej wartości napięcia. Po wyznaczeniu pojemności obliczamy rzeczywiste moce odbiorników wykorzystując fakt, że moc odbiornika jest proporcjonalna do napięcia w drugiej potęgze (patrz: rozwiązanie zadania 7.8).

Odpowiedź: $C=10,6 \mu\text{F}$, $P_1=554 \text{ W}$, $P_2=443 \text{ W}$.

Zadanie 7.14

Wskazówka: Zadanie rozwiązać metodą podobieństwa, zakładając znamionowe napięcie na odbiorniku drugim. Przy obliczaniu mocy pierwszego odbiornika wykorzystać fakt, że moc odbiornika jest proporcjonalna do napięcia w drugiej potęgze (patrz: rozwiązanie zadania 7.8). Kąt φ_A jest różnicą kątów fazowych obliczonego napięcia zasilania i prądu pobieranego ze źródła.

Odpowiedź: $U_z=520,6 \text{ V}$, $\cos\varphi_A \approx 1$, $P_1=2099 \text{ W}$.

Zadanie 7.15

Wskazówka: Zagadnienie analogiczne jak w zadaniu 7.14 w wersji uproszczonej, gdyż nie występuje kondensator.

Odpowiedź: $U_z=320,3 \text{ V}$.

Zadanie 7.16

Rozwiązanie:

Rozwiązanie przez analizę impedancji obwodu.

Z danych znamionowych transformatora obliczamy jego reaktancję zwarciovą, sprowadzoną do strony wtórnej:

$$X_T^{(0,4kV)} = \frac{u_{z\%} \cdot U_{T2n}^2}{100\% \cdot S_{Tn}} = 0,4063\Omega,$$

gdzie U_{T2n} oznacza znamionowe napięcie strony wtórnej transformatora, tu równe 400 V.

Obliczamy parametry schematu zastępczego dla każdego z odbiorników, przyjmując np. dla obydwu schemat równoległy R_{odb} , X_{odb} . Przy takim układzie połączeń obliczamy parametry następująco:

$$R_{odb1} = \frac{U_{1n}^2}{P_{1n}} = 14,44\Omega \quad X_{odb1} = \frac{U_{1n}^2}{Q_{1n}} = \frac{U_{1n}^2}{P_{1n} \cdot \operatorname{tg}\varphi_1} = 19,25\Omega$$

$$R_{odb2} = \frac{U_{2n}^2}{P_{2n}} = \frac{U_{2n}^2}{S_{2n} \cdot \cos\varphi_2} = 10,56\Omega \quad X_{odb2} = \frac{U_{2n}^2}{Q_{2n}} = \frac{U_{2n}^2}{S_{2n} \cdot \sin\varphi_2} = 12,34\Omega$$

Admitancja układu kondensator-odbiorniki wynosi:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_{odb1}} + \frac{1}{R_{odb2}} + \frac{1}{jX_{odb1}} + \frac{1}{jX_{odb2}} + \frac{1}{-jX_C} = 0,1639 + j\left(\frac{1}{X_C} - 0,133\right),$$

gdzie X_C jest reaktancją kondensatora.

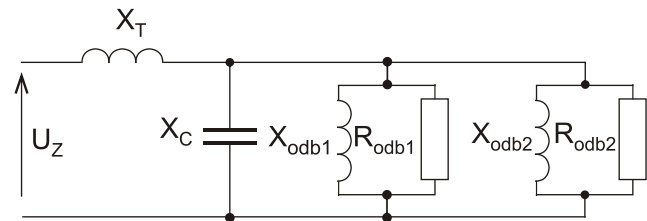
Wprowadzając zmienną pomocniczą:

$$a = \frac{1}{X_C} = \omega \cdot C$$

otrzymujemy:

$$\underline{Y}_1 = 0,1639 + j(a - 0,133).$$

Impedancja obwodu sprowadzona do strony wtórnej transformatora jest równa:



Rys. 7.16.I

$$\underline{Z} = jX_T^{(0,4kV)} + \frac{1}{\underline{Y}_1} = j0,4063 + \frac{1}{0,1639 + j(a - 0,133)} \cong \frac{0,1639 + j(0,4063a^2 - 1,108 \cdot a + 0,1511)}{a^2 - 0,266 \cdot a + 0,04455}.$$

Aby współczynnik mocy obwodu był równy zadanej wartości $\cos\varphi$, stosunek wypadkowej reaktancji (część urojona impedancji) obwodu do wypadkowej rezystancji (część rzeczywista impedancji) musi być równy tangensowi kąta φ :

$$\frac{X}{R} = \operatorname{tg}\varphi;$$

stąd:

$$\frac{0,4063a^2 - 1,108 \cdot a + 0,1511}{0,1639} = 0.$$

Po rozwiązaniu równania kwadratowego otrzymujemy dwa pierwiastki:

$$a_1 = 0,144, \quad a_2 = 2,583,$$

co prowadzi do dwóch wartości pojemności C , przy których spełnione są warunki zadania:

$$C_1 \cong 459\mu\text{F}, \quad C_2 \cong 8,23\text{mF};$$

(praktyczne znaczenie ma pierwsza – mniejsza - wartość pojemności).

Dla pojemności C_1 czyli dla $a=0,144$, po podstawieniu otrzymujemy $\underline{Z}=6,074+j0$. Rzeczywiste napięcie zasilania $\underline{U}_z$ po stronie pierwotnej przeliczamy na stronę wtórną transformatora:

$$\underline{U}_z^{(0,4kV)} = \underline{U}_z \cdot \frac{1}{9} = 408e^{j0^\circ} \text{ V}.$$

Prąd po stronie wtórnej transformatora jest równy:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_z^{(0,4\text{kV})}}{\underline{Z}} = 67,17e^{j0^\circ} \text{ A.}$$

Admitancja $\underline{Y}_1$ po podstawieniu wartości $a=0,144$ wynosi:

$$\underline{Y}_1 = (0,1639 + j0,011)\text{S} = 0,1643e^{j3,84^\circ} \text{ S.}$$

Napięcie na odbiornikach ma wartość:

$$\underline{U}_{\text{odb}} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}_1} = 408,9e^{-j3,84^\circ} \text{ V.}$$

Ponieważ moc pobierana przez odbiornik zmienia się proporcjonalnie do napięcia w drugiej potęgze, stąd:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{1n} \cdot \left(\frac{U_{\text{odb}}}{U_{1n}} \right)^2 = 11,58 \text{ kW}, \\ S_2 &= S_{2n} \cdot \left(\frac{U_{\text{odb}}}{U_{2n}} \right)^2 = 20,84 \text{ kV} \cdot \text{A}, \\ P_2 &= S_2 \cdot \cos \varphi_2 = 15,84 \text{ kW}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $C_1=459 \mu\text{F}$ lub $C_2=8,23 \text{ mF}$,
moce (dla $C_1=459 \mu\text{F}$): $P_1=11,58 \text{ kW}$, $P_2=15,84 \text{ kW}$.

Zadanie 7.17

Wskazówka: Zadanie rozwiązać metodą podobieństwa, zakładając znamionowe napięcie na odbiornikach. Wszystkie obliczenia można wykonać dla strony wtórnej transformatora – w tym również moce całkowite i współczynnik mocy obwodu; a następnie przeliczyć na końcu tylko napięcie zasilania na stronę pierwotną (korzystając z przekładni transformatora). Kąt φ jest różnicą kątów fazowych obliczonego napięcia zasilania i prądu pobieranego ze źródła.

Odpowiedź: $\cos\varphi=0,992$, $U_z=6032,5 \text{ V}$, $S=12,66 \text{ kV} \cdot \text{A}$, $P=12,56 \text{ kW}$, $Q=1,59 \text{ kvar}$.

Zadanie 7.18

Wskazówka: Zadanie rozwiązać metodą podobieństwa, zakładając znamionowe napięcie na odbiorniku drugim. Po przeliczeniu napięcia i prądu tego odbiornika na stronę pierwotną transformatora T_2 (należy również uwzględnić spadek napięcia na reaktancji zwarciowej tego transformatora), obliczamy prąd i moce odbiornika pierwszego, korzystając z faktu, że prąd zmienia się proporcjonalnie do zmian napięcia, zaś moce – do zmian napięcia w drugiej potęgze (patrz: rozwiązanie zadania 7.8). Przy obliczaniu pojemności korzystamy z trójkąta mocy, uwzględniając także moc bierną w reaktancji zwarciowej transformatora T_2 . Po dodaniu spadku napięcia na reaktancji zwarciowej transformatora T_1 należy przeliczyć sumaryczne napięcie na stronę pierwotną transformatora T_1 (korzystając z przekładni napięciowej).

Odpowiedź: $C=377 \text{ nF}$, $P_1=24,9 \text{ kW}$, $U_z=61,15 \text{ kV}$.

Zadanie 7.19

Wskazówka: Zadanie można rozwiązać metodą podobieństwa, zakładając znamionowe napięcie na odbiorniku. Po obliczeniu wynikającego stąd napięcia zasilania po stronie pierwotnej (w tym celu wypadkowe napięcie i prąd przeliczamy na stronę pierwotną transformatora) rzeczywistą moc odbiornika i sumaryczne moce w obwodzie, korzystając z faktu, że prąd zmienia się proporcjonalnie do zmian napięcia, zaś moce – do zmian napięcia w drugiej potęgze (patrz: rozwiązanie zadania 7.8).

Odpowiedź: $P_{\text{odb}}=104,2 \text{ kW}$, $S_z=107,2 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $P_z=104,4 \text{ kW}$, $Q_z=24,3 \text{ kvar}$.

8. OBWODY ZE SPRZĘŻENIAMI MAGNETYCZNYMI

Zadanie 8.1

Rozwiązanie:

Obliczamy indukcyjność sprzężenia:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 7,5 \text{ mH},$$

impedancję zastępczą równoległego układu $R_2 C$ (rys. 8.1.I):

$$\underline{Z}_{RC} = \frac{R_2 \frac{-j}{\omega C}}{R_2 - \frac{j}{\omega C}} = 10 - j10 \Omega$$

oraz reaktancje indukcyjne:

$$X_1 = \omega L_1 = 8 \Omega, \quad X_2 = \omega L_2 = 2 \Omega, \quad X_M = \omega M = 3 \Omega.$$

Na podstawie II prawa Kirchhoffa piszemy równanie napięciowe:

$$\underline{U}_Z - \underline{I}R_1 - \underline{I}jX_1 - \underline{I}jX_M - \underline{I}jX_2 - \underline{I}jX_M - \underline{I}\underline{Z}_{RC} = 0.$$

Prąd pobierany ze źródła wynosi:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_Z}{R_1 + j(X_1 + X_2 + 2X_M) + \underline{Z}_{RC}} = 4,59 - j1,38 = 4,79e^{-j16,70^\circ} \text{ A}.$$

Prądy kondensatora C i rezystora R_2 są równe:

$$\underline{I}_C = \underline{I} \frac{R_2}{R_2 - \frac{j}{\omega C}} = 2,98 + j1,61 = 3,89e^{j28,30^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_{R2} = \underline{I} - \underline{I}_C = 1,61 - j2,98 = 3,89e^{-j61,70^\circ} \text{ A}$$

Napięcia woltomierzy wynoszą:

$$\underline{U}_{V1} = \underline{I} \cdot j(X_1 + X_2 + 2X_M) = 76,63e^{j73,30^\circ} \text{ V}, \quad \underline{U}_{V2} = \underline{I} \cdot [j(X_2 + X_M) + \underline{Z}_{RC}] = 53,54e^{-j43,26^\circ} \text{ V}.$$

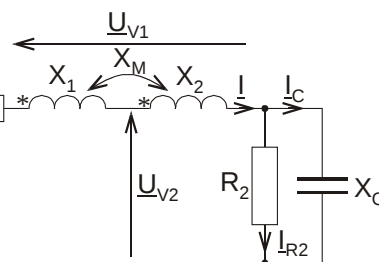
Moce czynna i bierna pobierane przez obwód:

$$P = I^2 R_1 + I_{R2}^2 R_2, \quad Q = I^2 (X_1 + X_2 + 2X_M) - I_C^2 \frac{1}{\omega C}.$$

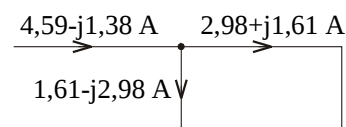
Moc pozorna oddawana przez źródło:

$$\underline{S} = \underline{U}_Z \underline{I}^*.$$

Odpowiedź: $U_{V1} = 76,6 \text{ V}$, $U_{V2} = 53,5 \text{ V}$, $\underline{S} = 458,7 + j137,6 \text{ V} \cdot \text{A}$,
rozpływ prądów podano na grafie – rys. 8.1.II.



Rys. 8.1.I



Rys. 8.1.II

Zadanie 8.2

Odpowiedź: $\underline{I}_1 = 7,29e^{j30,96^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_L = 5,30e^{-j45^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_2 = 3,75e^{-j90^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_C = 3,75 \text{ A}$,
 $U_{V1} = 53 \text{ V}$, $U_{V2} = 79,6 \text{ V}$, $\underline{S} = 937,5 + j562,5 \text{ V} \cdot \text{A}$

Zadanie 8.3

Rozwiązanie:

Stosujemy układ zastępczy bez sprzężeń magnetycznych – rys. 8.3.I. Reaktancje układu zastępczego mają wartość:

$$X_{z1} = X_1 - X_M = 5 \Omega, \quad X_{z2} = X_2 - X_M = 0, \quad X_{z3} = X_M = 5 \Omega.$$

Impedancja zastępcza obwodu wynosi:

$$\underline{Z} = jX_{z3} + \frac{(R_1 + jX_{z1})R_2}{R_1 + jX_{z1} + R_2} = 3,5 + j5,5 \Omega.$$

Prąd źródła wynosi:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}} = 8,23 - j12,94 \text{ A}.$$

Obliczamy pozostałe prądy:

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \frac{R_2 + jX_{z2}}{R_1 + jX_{z1} + R_2 + jX_{z2}} = 1,18 - j4,71 \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1 = 7,06 - j8,24 \text{ A}.$$

Sumaryczne moce, czynna i bierna, odbiorników wynoszą:

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 823,5 \text{ W}, \quad Q = I_1^2 X_{z1} + I_2^2 X_{z2} + I^2 X_{z3} = 1294 \text{ var}.$$

Moc pozorna źródła wynosi:

$$\underline{S} = \underline{U}_Z \underline{I}^* = 823,5 + j1294 \text{ V} \cdot \text{A}.$$

W przypadku zamiany końców jednej z cewek znak sprzężenia magnetycznego ulegnie odwróceniu, stąd reaktancje układu zastępczego będą miały wartość:

$$X_{z1} = X_1 + X_M = 15 \Omega, \quad X_{z2} = X_2 + X_M = 10 \Omega, \quad X_{z3} = -X_M = -5 \Omega.$$

Impedancja zastępcza obwodu wynosi:

$$\underline{Z} = jX_{z3} + \frac{(R_1 + jX_{z1})(R_2 + jX_{z2})}{R_1 + jX_{z1} + R_2 + jX_{z2}} = 3,38 + j1,03 \Omega.$$

Dalszy przebieg rozwiązania jest identyczny, jak poprzednio.

Przy braku sprzężenia prądy w gałęziach obliczamy wprost z prawa Ohma i prawa Kirchhoffa:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_Z}{R_1 + jX_1} = 5 - j5 \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_Z}{R_2 + jX_2} = 10 - j10 \text{ A}, \quad \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 15 - j15 \text{ A}.$$

Moce, czynna i bierna, odbiorników są równe:

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 1500 \text{ W}, \quad Q = I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 = 1500 \text{ var}.$$

Moc pozorną oblicza się według tej samej zależności, co poprzednio.

Odpowiedź: $I_1 = 4,85 \text{ A}$, $I_2 = 10,85 \text{ A}$, $I = 15,34 \text{ A}$, $\underline{S} = 823,5 + j1294 \text{ V} \cdot \text{A}$.

Po zamianie końców: $I_1 = 10,85 \text{ A}$, $I_2 = 17,5 \text{ A}$, $I = 28,28 \text{ A}$, $\underline{S} = 2706 + j823,5 \text{ V} \cdot \text{A}$.

Bez sprzężenia: $I_1 = 7,07 \text{ A}$, $I_2 = 14,14 \text{ A}$, $I = 21,21 \text{ A}$, $\underline{S} = 1500 + j1500 \text{ V} \cdot \text{A}$.

Zadanie 8.4

Odpowiedź: $U_V = 89,9 \text{ V}$, $I_A = 13,2 \text{ A}$

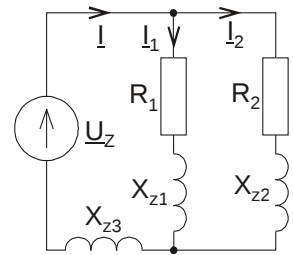
Zadanie 8.5

Odpowiedź: $U_{V1} = 53,6 \text{ V}$, $U_{V2} = 39,4 \text{ V}$, $U_{V3} = 52,5 \text{ V}$.

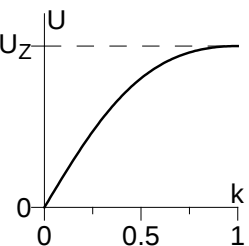
Zadanie 8.6

Odpowiedź: $U(k) = \frac{2k}{1+k^2} U_Z$. Wykres tej zależności przedstawia rys.

8.6.I



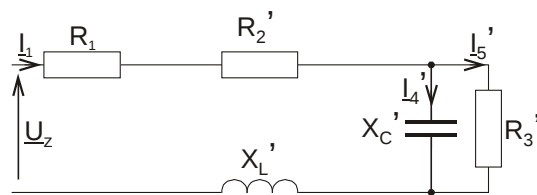
Rys. 8.3.I



Rys. 8.6.I

Zadanie 8.7*Rozwiązanie:*

Schemat zastępczy układu bez sprzężeń magnetycznych przedstawia rys. 8.7.I. Wszystkie impedancja po stronach wtórnych transformatorów zostały sprowadzone do strony pierwotnej transformatora T_1 .



Rys. 8.7.I

$$R_2' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_2 = 1 \Omega, \quad X_L' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 X_L = 4 \Omega,$$

$$X_C' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{n_3}{n_4}\right)^2 X_C = 43,56 \Omega, \quad R_3' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{n_3}{n_4}\right)^2 R_3 = 10,89 \Omega$$

Całkowita impedancja obwodu zastępczego widziana z zacisków źródła:

$$\underline{Z} = R_1 + R_2' + jX_L' + \frac{-jX_C'R_3'}{R_3' - jX_C'} = 15,75 + j1,44 \Omega$$

Prądy w układzie zastępczym (rys. 8.7.I):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_z}{\underline{Z}} = 2,28e^{-j5,22^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_4' = \underline{I}_1 \frac{R_3'}{R_3' - jX_C'} = 0,55e^{j70,75^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_5' = \underline{I}_1 - \underline{I}_4' = 2,21e^{-j19,25^\circ} \text{ A}$$

Prądy w układzie rzeczywistym (rys. 8.7.II):

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{n_1}{n_2}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{n_1}{n_2} \frac{n_3}{n_4}, \quad \underline{I}_4 = \underline{I}_4' \frac{n_1}{n_2} \frac{n_3}{n_4}, \quad \underline{I}_5 = \underline{I}_5' \frac{n_1}{n_2} \frac{n_3}{n_4}$$

Moce w obu układach są jednakowe, dlatego można je obliczyć w układzie zastępczym.

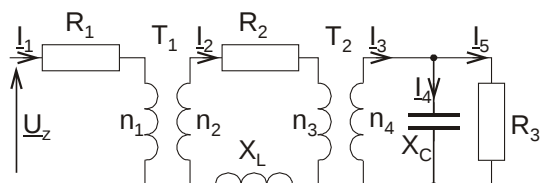
Moc odbiorników:

$$\underline{S}_0 = I_1^2(R_1 + R_2') + I_5'^2 R_3' + I_1^2 jX_L' - I_4'^2 jX_C'$$

Moc źródła:

$$\underline{S}_z = \underline{U}_z \underline{I}_1^*$$

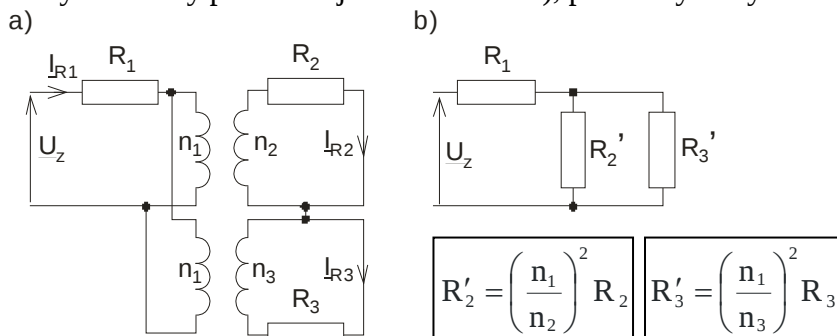
Odpowiedź: $\underline{I}_1 = 2,28e^{-j5,22^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_2 = 1,07e^{-j5,22^\circ} \text{ A}$,
 $\underline{I}_3 = 3,54e^{-j5,22^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_4 = 0,86e^{j70,75^\circ} \text{ A}$,
 $\underline{I}_5 = 3,44e^{-j19,25^\circ} \text{ A}$,
 $\underline{S}_z = P_0 + jQ_0 = 81,6 + j7,45 \text{ V} \cdot \text{A}$.



Rys. 8.7.II

Zadanie 8.8*Wskazówka:*

Transformator idealny występujący w zadaniu można zastąpić dwoma transformatorami idealnymi, połączonymi, jak na rys. 8.8.Ia. Stąd wynika schemat zastępczy obwodu (sprowadzony do strony pierwotnej transformatora), pokazany na rys. 8.8.Ib.



Rys. 8.8.I

Odpowiedź: $I_{R1} = 0,54 \text{ A}$, $I_{R2} = 0,65 \text{ A}$, $I_{R3} = 0,81 \text{ A}$, bilans mocy: $P_Z = P_O = 13 \text{ W}$.

Zadanie 8.9

Rozwiązanie:

Schemat obwodu przedstawia rys. 8.9.I. Poprzez idealny woltomierz, a więc i przez indukcyjność L_2 , nie płynie prąd. Z tego powodu sprzężenia magnetyczne z indukcyjnością L_2 nie mają wpływu na rozpył prądów w obwodzie. Obwód można zatem rozwiązać pomijając początkowo cewkę L_2 i stosując schemat zastępczy dla transformatora złożonego z cewek L_1 i L_3 .

Obliczamy parametry schematu zastępczego (rys. 8.9.II):

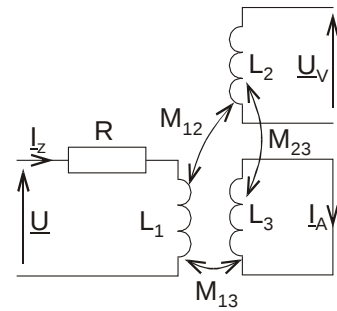
$$X_{z1} = j2\pi f(L_1 - M_{13}) = 3,77 \Omega, \quad X_{z3} = j2\pi f(L_3 - M_{13}) = 0,63 \Omega$$

$$X_M = j2\pi f M_{13} = 5,66 \Omega.$$

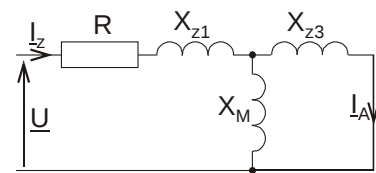
Całkowita impedancja obwodu:

$$\underline{Z} = R + jX_{z1} + j \frac{X_{z3} \cdot X_M}{X_{z3} + X_M} = 2,5 + j4,34 \Omega$$

Prąd pobierany ze źródła jest równy: $I_z = \frac{U}{\underline{Z}} = 1,5 - j2,6 \text{ A}$.



Rys. 8.9.I



Rys. 8.9.II

Prąd amperomierza wynosi: $I_A = I_z \frac{jX_M}{jX_{z3} + jX_M} = 2,7e^{-j60^\circ} \text{ A}$.

Z rozmieszczenia uzwojeń na rdzeniu magnetycznym wynika, że strumienie magnetyczne w cewce L_2 , indukowane przez pozostałe cewki, będą się sumowały. Jest to równoznaczne z sumowaniem napięć indukowanych poprzez sprzężenia M_{12} i M_{23} . Zatem napięcie woltomierza jest równe:

$$\underline{U}_V = I_z j2\pi f M_{12} + I_A j2\pi f M_{23} = 20,2e^{j30^\circ} \text{ V}.$$

Odpowiedź: $U_V = 20,2 \text{ V}$, $I_A = 2,7 \text{ A}$.

Zadanie 8.10

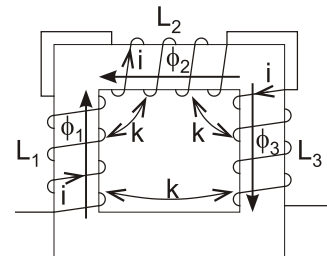
Odpowiedź: $U_V = 3,4 \text{ V}$, $I_A = 9,7 \text{ A}$.

Zadanie 8.11

Wskazówka:

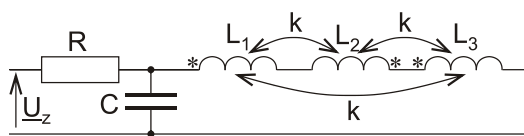
Rys. 8.11.I przedstawia rdzeń transformatora z zaznaczonym kierunkiem prądu w poszczególnych uzwojeniach i kierunkami indukowanych przez niego strumieni magnetycznych. Zwroty strumieni są określone regułą śruby prawoskrętnej. Z analizy ich rozkładu wynikają następujące wnioski:

- strumienie ϕ_1 i ϕ_2 są zwrócone do siebie przeciwnie – sprzężenie między indukcyjnościami L_1 i L_2 jest ujemne,
- strumienie ϕ_2 i ϕ_3 są zwrócone do siebie przeciwnie – sprzężenie między indukcyjnościami L_2 i L_3 jest ujemne,
- strumienie ϕ_1 i ϕ_3 są zwrócone zgodnie – sprzężenie między indukcyjnościami L_1 i L_3 jest dodatnie.



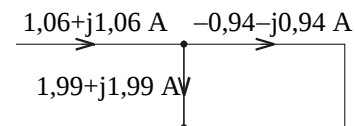
Rys. 8.11.I

Na podstawie powyższych wniosków można sporządzić schemat obwodu, przedstawiony na rys. 8.11.II.



Rys. 8.11.II

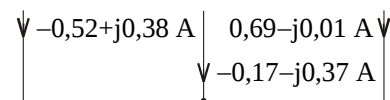
Odpowiedź: $\underline{S}_Z = P_O + jQ_O = 134,5 - j134,4 \text{ V}\cdot\text{A}$, rozpływ prądów przedstawiono na grafie – rys. 8.11.III.



Rys. 8.11.III

Zadanie 8.12

Odpowiedź: $\underline{S}_Z = P_O + jQ_O = 55,95 + j117,84 \text{ V}\cdot\text{A}$, rozpływ prądów przedstawiono na grafie – rys. 8.12.I.



Rys. 8.12.I

9. OBWODY TRÓJFAZOWE SYMETRYCZNE

SCHEMATY ROZWINIĘTE OBWODÓW TRÓJFAZOWYCH

Zadanie 9.1

Rozwiązanie:

Schemat zastępczy dla jednej fazy przedstawiono na rys. 9.1.I. W rozwiązaniu zostanie zastosowana metoda potencjałów węzłowych. Potencjał węzła obliczamy ze wzoru:

$$\underline{V}_0 = \frac{\frac{\underline{U}_A}{jX_0}}{\frac{1}{jX_0} + \frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R + jX_0}} = 230,1e^{-j7,66^\circ} \text{ V}.$$

Prąd odbiornika:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{V}_0}{R_0 + jX_0} = 15,15e^{-j71,1^\circ} \text{ A}$$

Prąd pojemności:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{V}_0}{-jX_C} = 15,87e^{j82,34^\circ} \text{ A}$$

Prąd źródła:

$$\underline{I}_Z = \underline{I}_0 + \underline{I}_C = 7,69e^{-j3,72^\circ} \text{ A}$$

Moc czynna odbiornika:

$$P_0 = 3I_0^2 R$$

Moc baterii kondensatorów:

$$Q_C = 3I_C^2 X_C$$

Moc pozorna źródła:

$$S_Z = 3U_A I_Z$$

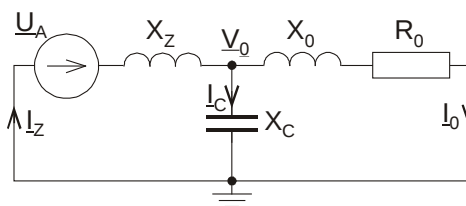
Odpowiedź: $P_0 = 5,3 \text{ kW}$, $Q_C = 11 \text{ kvar}$, $S_Z = 5,3 \text{ kV} \cdot \text{A}$

Zadanie 9.2

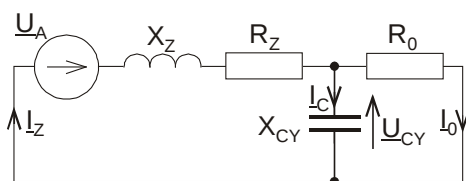
Rozwiązanie:

Przed sporządzeniem schematu zastępczego dla jednej fazy należy trójkąt reaktancji pojemnościowych X_C zastąpić równoważną symetryczną gwiazdą o wartości reaktancji:

$$X_{CY} = \frac{X_C}{3} = 30 \Omega$$



Rys. 9.1.I



Rys. 9.2.I

Schemat zastępczy obwodu z zastępczą gwiazdą pojemności przedstawiono na rys. 9.2.I. Obwód zastępczy zostanie rozwiązany metodą podobieństwa. Zakładamy wartość prądu $I'_0 = 10 \text{ A}$. Obliczamy kolejno:

$$\underline{U}'_{CY} = R_0 I'_0 = 180 \text{ V}$$

$$\underline{I}'_C = \frac{\underline{U}'_{CY}}{-jX_C} = j6 = 6e^{j90^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}'_Z = \underline{I}'_0 + \underline{I}'_C = 10 + j6 = 11,66e^{j30,96^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{U}'_A = \underline{U}'_{CY} + (R_Z + jX_Z)\underline{I}'_Z = 182 + j42 = 186,78e^{12,99^\circ} \text{ V}$$

Współczynnik podobieństwa:

$$\underline{k} = \frac{\underline{U}'_A}{\underline{U}_A} = 1,2 - j0,277 = 1,232e^{-j13^\circ}$$

Poprawne wartości zespolone prądów:

$$\underline{I}_0 = \underline{kI}'_0 = 12,31e^{-j12,99^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \underline{kI}'_C = 7,39e^{j77,01^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_Z = \underline{kI}'_Z = 14,36e^{j17,97^\circ} \text{ A}$$

Poprawna wartość napięcia zespolonego na pojemności:

$$\underline{U}_{CY} = \underline{kU}'_{CY} = 221,6e^{-j12,99^\circ} \text{ V}$$

Odpowiedź: prąd odbiornika $I_0 = 12,31 \text{ A}$, prąd baterii kondensatorów $I_C = 7,39 \text{ A}$, prąd źródła $I_Z = 14,36 \text{ A}$, napięcie przewodowe baterii kondensatorów $U_C = \sqrt{3} U_{CY} = 383,9 \text{ V}$.

Zadanie 9.3

Rozwiązanie:

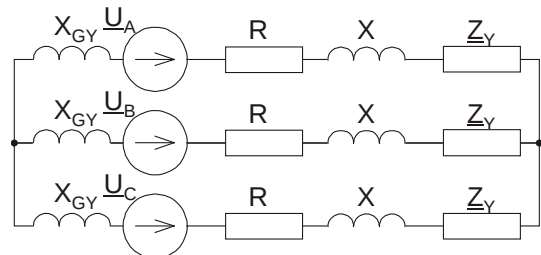
Przed sporządzeniem schematu zastępczego dla jednej fazy trzeba dokonać transfiguracji układów połączonych w trójkąt na równoważne połączenia gwiazdowe. Dotyczy to źródła i odbiornika. Aktywny trójkąt, w jaki połączone jest źródło zostaje zastąpiony aktywną gwiazdą o takiej samej konfiguracji gałęzi, ale o innych parametrach. W miejsce trójkąta rezystancji odbiornika zostaje włączona gwiazda rezystancji o trzykrotnie mniejszej wartości. Rozważany obwód trójfazowy po tych przekształceniach przyjmuje postać, jak na rys. 9.3.I.

Parametry zastępczych połączeń gwiazdowych mają wartości:

$$\underline{U}_A = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 254e^{-j30^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_B = \frac{\underline{U}_{BC}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 254e^{-j150^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{U}_{CA}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 254e^{j90^\circ} \text{ V},$$



Rys. 9.3.I

$$X_{GY} = \frac{X_G}{3} = 1,1 \Omega, \quad Z_Y = \frac{Z}{3} = 6e^{j39^\circ} \Omega$$

Rozwiązujemy obwód zastępczy dla fazy A (rys. 9.3.II).

Prąd w przewodzie zasilającym wynosi:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{jX_{GY} + R + jX + Z_Y} = 34,03e^{-j78,34^\circ} \text{ A}.$$

Zaznaczone na schemacie zastępczym napięcia są równe:

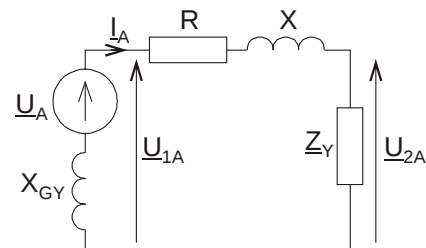
$$\underline{U}_{1A} = \underline{U}_A - \underline{I}_A jX_{GY} = 227,44e^{-j36,28^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_{2A} = \underline{I}_A Z_Y = 204,19e^{-j39,33^\circ} \text{ V}.$$

Prądy i napięcia poszukiwane w zadaniu obliczamy następująco:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{I}_A}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} e^{-j120^\circ}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_A e^{-j120^\circ}, \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{I}_A}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} e^{j120^\circ},$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1A} \sqrt{3} e^{j30^\circ}, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{2A} \sqrt{3} e^{j30^\circ} e^{-j120^\circ}.$$



Rys. 9.3.II

Odpowiedź: $\underline{I}_1 = 19,65e^{-j168,33^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_2 = 34,03e^{j161,67^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_3 = 19,65e^{j71,67^\circ} \text{ A}$, $\underline{U}_1 = 393,93e^{-j6,28^\circ} \text{ V}$,
 $\underline{U}_2 = 353,67e^{-j129,33^\circ} \text{ V}$.

Zadanie 9.4

Odpowiedź: Wskazanie woltomierz $U_V = 420,6 \text{ V}$, wskazanie amperomierza $I_A = 6,7 \text{ A}$,

Zadanie 9.5

Odpowiedź: Wskazanie watomierza: $P = 1845 \text{ W}$. Moc bierna odbiornika 2: $Q = \sqrt{3} P = 3196 \text{ var}$.

Zadanie 9.6

Odpowiedź: prądy źródeł: $I_{Z1} = 8,85 \text{ A}$, $I_{Z2} = 5,9 \text{ A}$,
 prądy odbiorników: $I_{O1} = 8,09 \text{ A}$, $I_{O2} = 3,85 \text{ A}$,
 napięcie zasilające odbiorniki $U_O = 202 \text{ V}$ (przewodowe).

Zadanie 9.7

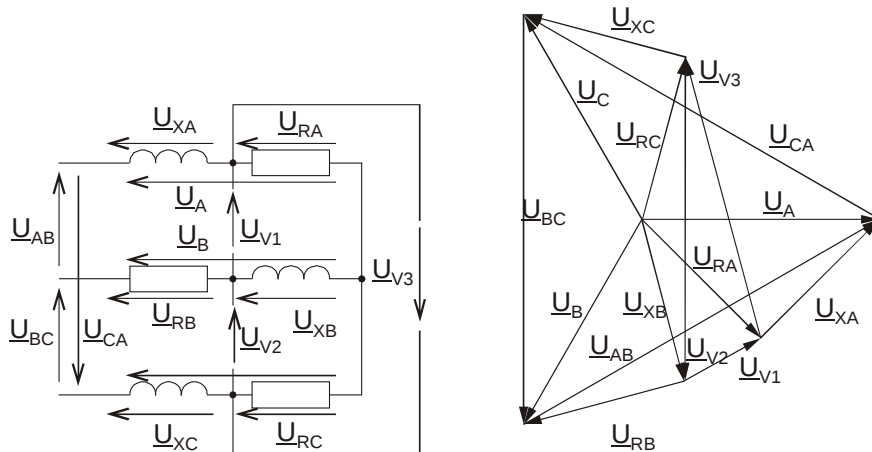
Odpowiedź: $\underline{I}_1 = 6,46e^{j132,45^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_2 = 11,19e^{j102,45^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_3 = 17,31e^{-j45^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_4 = 5,25e^{-j45^\circ} \text{ A}$,
 $\underline{I}_5 = 8,35e^{-j136,98^\circ} \text{ A}$.

Zadanie 9.8

Odpowiedź: Wskazania watomierzy $P_{W1} = 15,8 \text{ W}$, $P_{W2} = 94,8 \text{ W}$.
 Moc źródła $P_Z = 3(P_{W1} + P_{W2}) = 331,8 \text{ W}$.

Zadanie 9.9

Rozwiązanie:



Rys. 9.4.I

Rozwiązanie na podstawie wykresu fazorowego

Wykres fazorowy sporządzono tak, aby odzwierciedlał zależności między napięciami, wynikające z praw Kirchhoffa – rys. 9.4.I. W trójkąt napięć przewodowych źródła $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$, $\underline{U}_{CA}$ wpisano gwiazdę napięć fazowych odbiornika $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$. Napięcia na elementach biernych obwodu spełniają równania:

$$(9.1) \quad \begin{cases} \underline{U}_A = \underline{U}_{RA} + \underline{U}_{XA} \\ \underline{U}_B = \underline{U}_{XB} + \underline{U}_{RB} \\ \underline{U}_C = \underline{U}_{RC} + \underline{U}_{XC} \end{cases}$$

Na wykresie początki fazorów napięć $\underline{U}_{RA}$, $\underline{U}_{XB}$, $\underline{U}_{RC}$, umieszczono w punkcie gwiazdowym odbiornika, podobnie jak ma to miejsce na schemacie obwodu. Napięcia woltomierzy narysowano tak, jak określają je równania Kirchhoffa:

$$(9.2) \quad \begin{cases} \underline{U}_{V1} = \underline{U}_{RA} - \underline{U}_{XB} \\ \underline{U}_{V2} = \underline{U}_{XB} - \underline{U}_{RC} \\ \underline{U}_{V3} = \underline{U}_{RC} - \underline{U}_{RA} \end{cases}$$

Wskazania woltomierzy można obliczyć z wykresu fazorowego. Biorąc pod uwagę, że fazory napięć występujących w równaniach układu (9.1) tworzą trójkąty prostokątne równoramienne, można obliczyć napięcie U_{RA} :

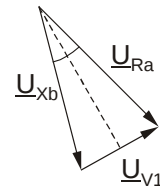
$$U_{RA} = \frac{U_A}{\sqrt{2}} = \frac{400}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 163,3 \text{ V}$$

Ze względu na to, że wszystkie rezystancje i reaktancje są jednakowe, wartości napięć na tych elementach i długości odpowiadających im fazorów są takie same. Zatem trójkąt utworzony przez fazory $\underline{U}_{RA}$, $\underline{U}_{XB}$, $\underline{U}_{V1}$, jest równoramienny – rys. 9.4.II. Kąt między ramionami jest równy:

$$\angle(\underline{U}_{XB}, \underline{U}_{RA}) = \angle(\underline{U}_A, \underline{U}_B) - \angle(\underline{U}_B, \underline{U}_{XB}) - \angle(\underline{U}_{RA}, \underline{U}_A) = 120^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

Długość fazora $\underline{U}_{V1}$, czyli wartość napięcia U_{V1} obliczamy z zależności:

$$U_{V1} = 2 \cdot U_{RA} \cdot \sin \frac{\angle(\underline{U}_{XB}, \underline{U}_{RA})}{2}$$



Rys. 9.4.II

Wskazanie woltomierza V_2 obliczamy rozwiązując w podobny sposób trójkąt równoramienny utworzony przez fazory $\underline{U}_{RC}$, $\underline{U}_{XB}$, $\underline{U}_{V2}$, o kącie między ramionami równym:

$$\angle(\underline{U}_{XB}, \underline{U}_{RC}) = \angle(\underline{U}_B, \underline{U}_C) - \angle(\underline{U}_B, \underline{U}_{XB}) - \angle(\underline{U}_{RC}, \underline{U}_B) = 240^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 150^\circ$$

Wskazanie woltomierza V_3 obliczamy rozwiązując trójkąt równoramienny utworzony przez fazory $\underline{U}_{RA}$, $\underline{U}_{RC}$, $\underline{U}_{V3}$, o kącie między ramionami równym:

$$\angle(\underline{U}_{RA}, \underline{U}_{RC}) = \angle(\underline{U}_A, \underline{U}_C) - \angle(\underline{U}_{RC}, \underline{U}_C) + \angle(\underline{U}_{RA}, \underline{U}_A) = 120^\circ - 45^\circ + 45^\circ = 120^\circ$$

Rozwiązanie na podstawie równań obwodu

Układ zawiera jednakowe impedancje w poszczególnych fazach, jest więc układem symetrycznym. Prąd w fazie A jest określony następująco:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{R + jX} = \frac{U}{\sqrt{3}} \frac{1}{R + jR} = \frac{U}{\sqrt{3}R} e^{-j45^\circ}$$

Napięcia woltomierzy obliczamy z układu równań (9.2), wyrażając poszczególne napięcia na elementach poprzez prawo Ohma:

$$\underline{U}_{V1} = \underline{I}_A R - \underline{I}_B jX = \underline{I}_A R - \underline{I}_A e^{-j120^\circ} jR = \underline{I}_A R (1 - e^{-j30^\circ}) = \frac{U}{\sqrt{3}R} e^{-j45^\circ} R (1 - e^{-j30^\circ}) = 84,53 e^{j30^\circ} \text{ V}$$

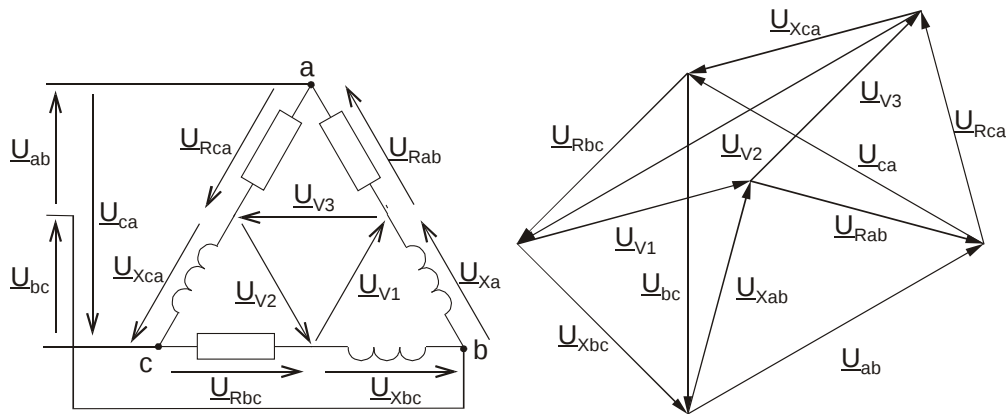
$$\begin{aligned} \underline{U}_{V2} &= \underline{I}_B jX - \underline{I}_C R = \underline{I}_A e^{-j120^\circ} jR - \underline{I}_A e^{j120^\circ} R = \underline{I}_A R (e^{-j30^\circ} - e^{j120^\circ}) = \\ &= \frac{U}{\sqrt{3}R} e^{-j45^\circ} R (e^{-j30^\circ} - e^{j120^\circ}) = 315,47 e^{-j90^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{V3} = \underline{I}_C R - \underline{I}_A R = \underline{I}_A e^{j120^\circ} R - \underline{I}_A R = \underline{I}_A R (e^{j120^\circ} - 1) = \frac{U}{\sqrt{3} R + jR} R (e^{j120^\circ} - 1) = 282,84 e^{j165^\circ} \text{ V}$$

Odpowiedź: $U_{V1} = 84,53 \text{ V}$, $U_{V2} = 315,47 \text{ V}$, $U_{V3} = 282,84 \text{ V}$.

Zadanie 9.10

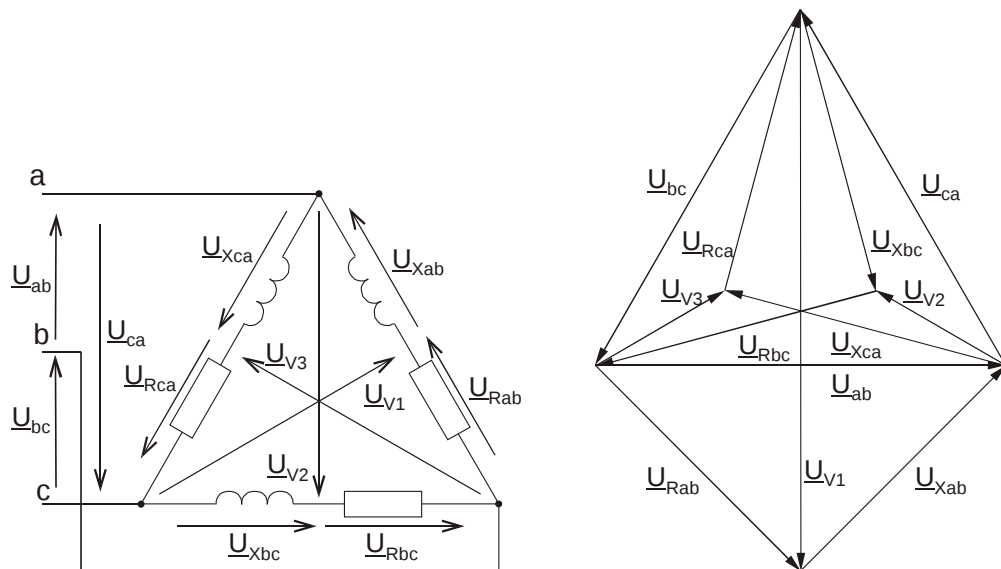
Odpowiedź: $U_{V1} = 282,84 \text{ V}$, $U_{V2} = 546,41 \text{ V}$, $U_{V3} = 282,84 \text{ V}$. Wykres fazorowy przedstawiono na rys. 9.5.I.



Rys. 9.5.I

Zadanie 9.11

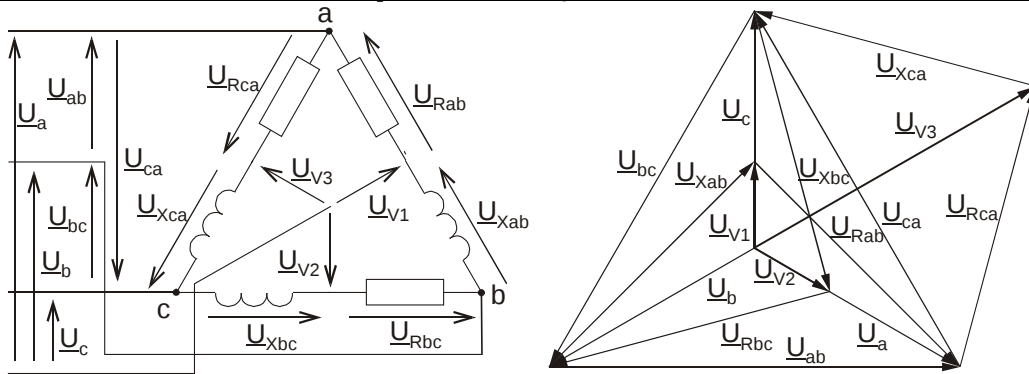
Odpowiedź: $U_{V1} = 546,41 \text{ V}$, $U_{V2} = 146,41 \text{ V}$, $U_{V3} = 146,41 \text{ V}$. Wykres fazorowy przedstawiono na rys. 9.6.I.



Rys. 9.6.I

Zadanie 9.12

Odpowiedź: $U_{V1} = 84,53 \text{ V}$, $U_{V2} = 83,53 \text{ V}$, $U_{V3} = 315,47 \text{ V}$. Wykres fazorowy przedstawiono na rys. 9.7.I.



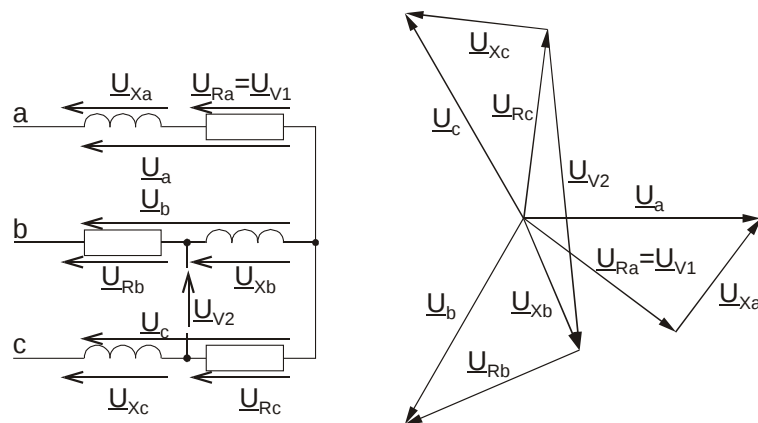
Rys. 9.7.I

Zadanie 9.13

Odpowiedź: $\cos\varphi = 0,5$ (odbiornik indukcyjny).

Zadanie 9.14

Odpowiedź: $R = 30 \, \Omega$, $X = 44 \, \Omega$, $U = 230,7 \, \text{V}$. Wykres fazorowy przedstawiono na rys. 9.8.I.



Rys. 9.8.1

Zadanie 9.15

Odpowiedź: $P_{W3} = -500 \text{ W}$, $P_{W4} = 500 \text{ W}$. Moc wskazywana przez watomierz W_3 jest równa:

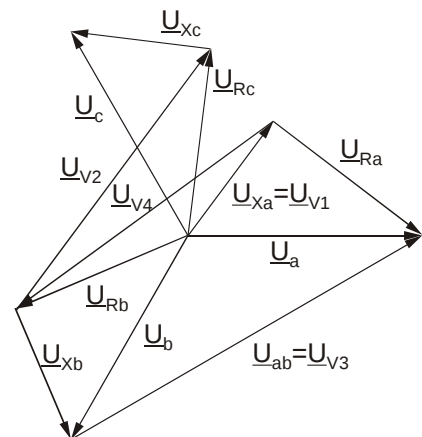
$$P_{W3} = U_{ca} I_b \cos(150^\circ - (\varphi - 120^\circ)) = -U I \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad (\text{ką}\acute{t} \ \varphi \ \text{jest dla obci}\acute{a}\text{żenia}$$

indukcyjnego dodatni). Zatem mnożąc wskazanie watomierza przez $\sqrt{3}$ otrzymujemy wartość mocy biernej odbiornika.

Zadanie 9.16

Odpowiedź: $U_{V3} = 400 \text{ V}$, $U_{V2} = 266,9 \text{ V}$, $U_{V5} = 154,1 \text{ V}$.

Wykres fazorowy przedstawiono na rys. 9.9.I.



Rys. 9.9.I

Zadanie 9.17

Odpowiedź: a) $\underline{Z} = 12,5 - j21,65 \Omega$, b) $\underline{Z} = 25,04 \Omega$.

Zadanie 9.18

Rozwiązanie:

Sporządzamy schemat zastępczy układu trójfazowego bez sprzężeń magnetycznych. Na jego postać składają się trzy schematy zastępcze cewek sprzężonych rozpatrywanych parami: dla faz A-B i B-C, dla faz B-C i C-A oraz dla faz C-A i A-B. Złożenie tych trzech schematów daje obwód bez sprzężeń pokazany na rys. 9.10.I.

Następnie rozwiązujemy obwód dla jednej fazy – rys. 9.10.II. Impedancja całkowita fazy jest równa:

$$\underline{Z} = -jX_M + \frac{R + j(X - X_M)}{3} = 10 + j8 = 12,81e^{j38,66^\circ} \Omega.$$

Prąd linii jest równy:

$$\underline{I} = \frac{U}{\sqrt{3}\underline{Z}} = 18,03e^{-j38,66^\circ} \text{ A}.$$

Prąd fazowy odbiornika jest równy:

$$\underline{I}_f = \frac{\underline{I}}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = 10,41e^{-j8,66^\circ} \text{ A}.$$

Moc pozorna układu wynosi:

$$\underline{S} = P + jQ = \sqrt{3}U \cdot \underline{I}^* = (9756 + j7805) \text{ V} \cdot \text{A}$$

Współczynnik mocy:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}.$$

Odpowiedź: $I_f = 10,41 \text{ A}$, $I = 18,03 \text{ A}$, $P = 9,76 \text{ kW}$, $\cos \varphi = 0,78$.

Zadanie 9.19

Odpowiedź: a) $R = 5,12 \Omega$, $X = 3,84 \Omega$,
b) $R = 8 \Omega$, $X = 10,667 \Omega$,
c) $R = 15,36 \Omega$, $X = 11,52 \Omega$,
d) $R = 24 \Omega$, $X = 32 \Omega$.

SCHEMATY JEDNOKRESKOWE OBWODÓW TRÓJFAZOWYCH**Zadanie 9.20**

Rozwiązanie:

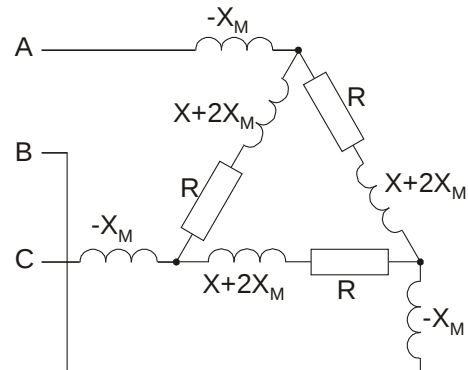
Schemat zastępczy układu dla jednej fazy został sprowadzony do poziomu napięć 15 kV – rys. 9.11.I.

Obliczamy niezbędne parametry schematu.

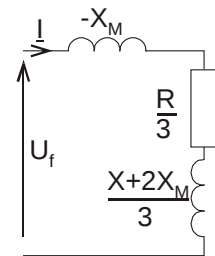
Reaktancja transformatora 1:

$$X_1 = \frac{u_{x1\%} U_{T1n}^{(GN)^2}}{100 S_{T1n}} = 35,71 \Omega.$$

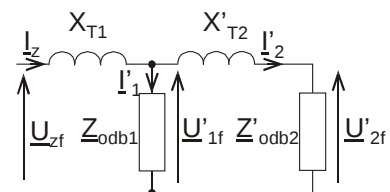
Reaktancja transformatora 2 sprowadzona:



Rys. 9.10.I



Rys. 9.10.II



Rys. 9.11.I

$$X_2' = \frac{u_{x2\%} U_{T2n}^{(GN)^2}}{100 S_{T2n}} g_1^2 = 158,53 \Omega.$$

Napięcie zasilające fazowe:

$$U_{zf} = \frac{U_z}{\sqrt{3}} = 8,66 \text{ kV}.$$

Stosujemy metodę podobieństwa. Zakładamy, że odbiornik 2 pracuje w warunkach znamionowych. Zasilające go napięcie fazowe po sprowadzeniu ma wartość:

$$\underline{U}_{2f}' = \frac{U_{2n}}{\sqrt{3}} e^{j0} \cdot g_1 \cdot g_2 = 7,97 \text{ kV}.$$

Prąd odbiornika 2 w schemacie zastępczym wynosi:

$$\underline{I}_2' = \frac{P_{2n}}{\sqrt{3} U_{2n} \cos \varphi_2} e^{-j \arccos(\cos \varphi_2)} \frac{1}{g_1} \frac{1}{g_2} = 5,1 e^{-j34,92^\circ} \text{ A}.$$

Napięcie fazowe zasilające odbiornik 1 jest większe od napięcia odbiornika 2 o spadek na reaktancji transformatora 2:

$$\underline{U}_{1f}' = \underline{U}_{2f}' + j X_2' \underline{I}_2' = 8,46 e^{j4,49^\circ} \text{ kV}.$$

Prąd odbiornika 1 sprowadzony obliczamy uwzględniając współczynnik podobieństwa, określony jako:

$$\underline{k}_1 = \frac{\underline{U}_{1f}' \sqrt{3}}{U_{1n} g_1} = 1,01 e^{j4,49^\circ}$$

gdyż przy poczynionym założeniu znamionowych warunków pracy odbiornika 2, odbiornik 1 może nie pracować przy napięciu znamionowym, a ponadto napięcie na odbiorniku 1 ma fazę różną od zera:

$$\underline{I}_1' = \frac{P_{1n}}{\sqrt{3} U_{1n} \cos \varphi_1} e^{-j \arccos(\cos \varphi_1)} \frac{1}{g_1} \underline{k}_1 = 15,8 e^{-j36,05^\circ} \text{ A}.$$

Prąd pobierany ze źródła jest sumą prądów odbiorników:

$$\underline{I}_z = \underline{I}_1' + \underline{I}_2' = 20,9 e^{-j35,77^\circ} \text{ A}.$$

Napięcie zasilające fazowe, wynikające z przyjętego założenia w metodzie podobieństwa, jest większe od napięcia odbiornika 1 o spadek na reaktancji transformatora 1:

$$\underline{U}_{zf}' = \underline{U}_{1f}' + j X_1' \underline{I}_z = 8,96 e^{j8,14^\circ} \text{ kV}.$$

Współczynnik podobieństwa dla całego obwodu jest równy:

$$k = \frac{U_{zf}'}{U_{zf}} = 0,966.$$

Rzeczywiste moce odbiorników i prąd pobierany ze źródła obliczamy następująco:

$$P_{odb1} = P_{1n} \cdot k_1^2 \cdot k^2, \quad P_{odb2} = P_{2n} \cdot k^2, \quad I_z = I_z' \cdot k.$$

Odpowiedź: Moc odb₁: 284,7 kW, moc odb₂: 93,4 kW, I_z=20,2 A.

Zadanie 9.21

Odpowiedź: I_{odb}=119,4 A, P_{odb}=574,4 kW,

$$I_{z1}=5,76 \text{ A}, \quad P_{z1}=304,1 \text{ kW},$$

$$I_{z2}=17,56 \text{ A}, \quad P_{z2}=270,3 \text{ kW}.$$

Zadanie 9.22

Odpowiedź: $U=11 \text{ kV}$, $I=8,9 \text{ kA}$, $P=122,9 \text{ MW}$, $\cos\varphi=0,726$

Zadanie 9.23

Odpowiedź: $P_2=124 \text{ kW}$, $U_2=714,5 \text{ V}$

Zadanie 9.24

Odpowiedź: $I_z=7 \text{ A}$, $P_z=1206 \text{ kW}$, $Q_z=436 \text{ kvar}$, $S_z=1283 \text{ kV}\cdot\text{A}$, $\cos\varphi_z=0,94$.

Zadanie 9.25

Odpowiedź: $U_z=114,5 \text{ kV}$, $I_z=7,55 \text{ A}$, $P_z=1407 \text{ kW}$, $Q_z=508,6 \text{ kvar}$, $S_z=1496 \text{ kV}\cdot\text{A}$.

Zadanie 9.26

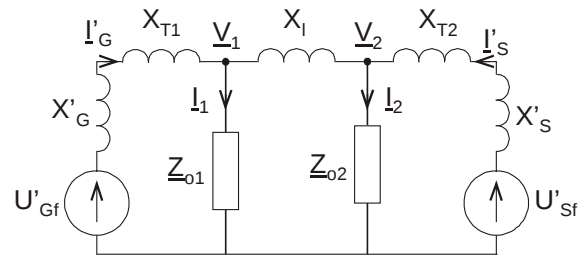
Rozwiązanie:

Schemat zastępczy układu dla jednej fazy został sprowadzony do poziomu napięć 110 kV – rys. 9.12.I.

Obliczamy parametry schematu:

- napięcie fazowe generatora sprowadzone

$$U'_{Gf} = u_G \frac{U_{Gn}}{\sqrt{3}} \vartheta_1 = 60,48 \text{ kV}$$



Rys. 9.12.I

- reaktancja generatora sprowadzona

$$X'_G = \frac{x_{G\%}}{100} \frac{U_{Gn}^2 \cos\varphi_{Gn}}{P_{Gn}} \vartheta_1^2 = 3,28 \Omega,$$

- reaktancja transformatora 1

$$X_{T1} = \frac{x_{z1\%}}{100} \frac{(U_{T1n}^{(GN)})^2}{S_{T1n}} = 0,86 \Omega,$$

- reaktancja transformatora 2

$$X_{T2} = \frac{x_{z2\%}}{100} \frac{(U_{T2n}^{(DN)})^2}{S_{T2n}} = 0,96 \Omega,$$

- reaktancja linii napowietrznej

$$X_1 = l \cdot X_{km} = 6 \Omega,$$

- napięcie fazowe systemu sprowadzone

$$U'_{Sf} = \frac{U_S}{\sqrt{3}} \frac{1}{\vartheta_2} = 66,4 \text{ kV},$$

- reaktancja systemu sprowadzona

$$X'_S = \frac{U_S^2}{S_z} \frac{1}{\vartheta_2^2} = 3,28 \Omega,$$

- impedancja odbiornika 1

$$Z_{o1} = \frac{U_{1n}^2 \cos\varphi_1}{P_{1n}} e^{j \arccos(\cos\varphi_1)} = 8,28 + j7,53 \Omega,$$

- impedancja odbiornika 2

$$Z_{o2} = \frac{U_{2n}^2 \cos\varphi_2}{P_{2n}} e^{j \arccos(\cos\varphi_2)} = 16,95 + j11,83 \Omega.$$

Obwód rozwiążemy metodą potencjałów węzłowych. Macierz admitancji węzłowych ma postać:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j(X'_G + X_{T1})} + \frac{1}{jX_1} + \frac{1}{Z_{o1}} & -\frac{1}{jX_1} \\ -\frac{1}{jX_1} & \frac{1}{j(X'_S + X_{T2})} + \frac{1}{jX_1} + \frac{1}{Z_{o2}} \end{bmatrix}$$

Wektor prądów źródłowych jest równy:

$$\underline{\mathbf{I}}_Z = \begin{bmatrix} \frac{U'_{Gf}}{j(X'_G + X_{T1})} \\ \frac{U'_{Sf}}{j(X'_S + X_{T2})} \end{bmatrix}$$

Wektor nieznanych potencjałów węzłowych

$$\underline{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

obliczamy rozwiązując układ równań zapisany w postaci macierzowej:

$$\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{I}}_Z.$$

Po jego rozwiązaniu uzyskujemy: $\underline{V}_1 = 50,24e^{-j11,64^\circ}$ kV, $\underline{V}_2 = 55,37e^{-j9,32^\circ}$ kV.

Obliczamy prądy w schemacie zastępczym:

$$\underline{I}'_G = \frac{U'_{Gf} - \underline{V}_1}{j(X'_G + X_{T1})} = 3,66e^{-j48,04^\circ} \text{ kA}, \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1}{Z_{o1}} = 4,49e^{-j53,91^\circ} \text{ kA},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_2}{Z_{o2}} = 2,68e^{-j44,24^\circ} \text{ kA}, \quad \underline{I}'_S = \frac{U'_{Sf} - \underline{V}_2}{j(X'_S + X_{T2})} = 3,49e^{-j52,67^\circ} \text{ kA}.$$

Obliczone wartości prądów generatora i systemu są sprowadzone do poziomu 110 kV. Wartości rzeczywiste są równe:

$$\underline{I}_G = \underline{I}'_G \vartheta_1, \quad \underline{I}_S = \underline{I}'_S \frac{1}{\vartheta_2}.$$

Moce czynne odbiorników, w stosunku do znamionowych, zmieniają się z kwadratem stosunku napięć:

$$P_1 = P_{1n} \left(\frac{V_1 \sqrt{3}}{U_{1n}} \right)^2, \quad P_2 = P_{2n} \left(\frac{V_2 \sqrt{3}}{U_{2n}} \right)^2.$$

Moce czynne pobierane z generatora i systemu można obliczyć następująco:

$$P_G = \operatorname{Re}\{\sqrt{3}U_{Gn} \underline{I}_G^*\}, \quad P_S = \operatorname{Re}\{\sqrt{3}U_S \underline{I}_S^*\}$$

Odpowiedź: Odbiornik 1: $I_1=4,49$ kA, $P_1=500,7$ MW
 Odbiornik 2: $I_2=2,68$ kA, $P_2=364,8$ MW
 Generator: $I_G=25,58$ kA, $P_G=444,3$ MW
 System: $I_S=1,0$ kA, $P_S=421,2$ MW

Zadanie 9.27

Odpowiedź: a) $U_z=114,9$ kV, $I_z=11,64$ A, $P_z=1,82$ MW, $Q_z=1,43$ Mvar,
 b) $U_z=109,8$ kV, $I_z=11,12$ A, $P_z=1,66$ MW, $Q_z=1,31$ Mvar,

Zadanie 9.28

Odpowiedź: Odb₁: $I=98,57$ A, $P=14,11$ MW,

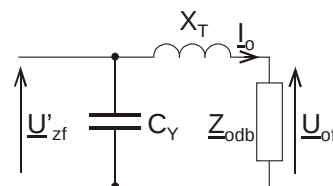
Odb₂: I=169,49 A, P=6,52 MW,
U_z=401 kV.

Zadanie 9.29

Rozwiązanie:

Schemat zastępczy układu dla jednej fazy - rys. 9.13.I - został sprowadzony do strony wyższego napięcia transformatora (15 kV). Reaktancja transformatora jest równa:

$$X_T = \frac{u_{z\%} U_{1n}^2}{100 S_{Tn}} = 321,4 \, \Omega.$$



Rys. 9.13.I

Budując schemat zastępczy obwodu dla jednej fazy zakłada się, że wszystkie elementy trójfazowe są połączone w gwiazdę, stąd schemat zawiera pojemność jednej fazy zastępczej baterii kondensatorów połączonej w gwiazdę.

Stosujemy metodę podobieństwa. Zakładamy, że odbiornik pracuje w warunkach znamionowych. Napięcie fazowe zasilające odbiornik (wartość sprowadzona) wynosi:

$$U_{of} = \frac{U_n}{\sqrt{3}} \frac{U_{1n}}{U_{2n}} = 8227 \, \text{V}.$$

Odbiornik pobiera prąd znamionowy o wartości zespolonej sprowadzonej:

$$I_o = \frac{P_n}{\sqrt{3} U_n \cos \varphi_n} e^{-j \arccos(\cos \varphi_n)} \frac{U_{2n}}{U_{1n}} = 2,41 e^{-j 32,86^\circ} \, \text{A}.$$

Wartość napięcia fazowego zasilającego układ wynikająca z założenia pracy znamionowej odbiornika jest równa sumie napięć na odbiorniku i reaktancji transformatora:

$$U'_{zf} = U_{of} + j X_T I_o = 8672 e^{j 4,31^\circ} \, \text{V}.$$

Wartość pojemności kondensatorów zastępczej gwiazdy obliczamy ze wzoru:

$$C_Y = \frac{Q - P_n \operatorname{tg}(\arccos(0,96))}{\omega (\sqrt{3} U'_{zf})^2} = 329,2 \, \text{nF}.$$

Pojemność w układzie trójkąta jest trzykrotnie mniejsza:

$$C_\Delta = \frac{C_Y}{3}.$$

Moc pobieraną przez odbiornik obliczamy mnożąc moc znamionową przez kwadrat współczynnika podobieństwa:

$$P = P_n \left(\frac{U_z}{\sqrt{3} U'_{zf}} \right)^2$$

Odpowiedź: P=48,5 kW, C_Δ=109,7 nF

Zadanie 9.30

Odpowiedź: P=66,4 kW

Zadanie 9.31

Odpowiedź: Moc baterii: 271,3 kvar, C_Δ=1,28 μF.

Zadanie 9.32

Odpowiedź: C_Δ=0,65 μF.

Przed kompensacją: I=19,42 A, S=544 kV·A.

Po kompensacji: I=16,24 A, S=455,1 kV·A.

Zadanie 9.33

Odpowiedź: $C_Y = 103,3 \text{ nF}$.

Przed kompensacją: $I = 8,74 \text{ A}$, po kompensacji: $I = 7,7 \text{ A}$.

Zadanie 9.34

Odpowiedź: $C_{1Y} = 960 \text{ }\mu\text{F}$, $C_{2Y} = 347,5 \text{ }\mu\text{F}$.

Zadanie 9.35

Odpowiedź: $C_1 = 0,93 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 0,46 \text{ }\mu\text{F}$

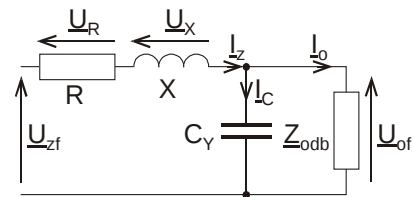
Przed kompensacją: $I = 72,1 \text{ A}$, po kompensacji: $I = 57,5 \text{ A}$.

Zadanie 9.36

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy schemat zastępczy dla jednej fazy (rys. 9.14.I) i metodę podobieństwa. Założymy, że na odbiorniku występuje napięcie znamionowe. Napięcie fazowe odbiornika jest równe:

$$U_{of} = \frac{U_n}{\sqrt{3}} = 8,66 \text{ kV}$$



Rys. 9.14.I

Przyjmujemy, że $\underline{U}_{of} = U_{of} e^{j0}$. Odbiornik pobiera znamionowy prąd o wartości zespolonej równej:

$$\underline{I}_o = I_{oc} + jI_{ob} = \frac{P_o}{\sqrt{3}U_o \cos \varphi_o} e^{-j \arccos(\cos \varphi_o)} = 53,89 - j40,42 = 67,36 e^{-j36,87^\circ} \text{ A}.$$

Na podstawie prawa Kirchhoffa można napisać następujące równanie:

$$U_{of} + \underline{I}_z (R + jX) = \underline{U}_{zf}.$$

Uwzględniając, że $\underline{I}_z = \underline{I}_C + I_{oc} + jI_{ob}$ oraz $\underline{I}_C = \frac{U_{of}}{-jX_C}$ otrzymujemy:

$$U_{of} + \left(\frac{U_{of}}{-jX_C} + I_{oc} + jI_{ob} \right) (R + jX) = \underline{U}_{zf}.$$

Po wykonaniu mnożenia i wyodrębnieniu części rzeczywistej i urojonej lewej strony równania przybiera ono postać:

$$U_{of} + RI_{oc} - XI_{ob} - \frac{U_{of} X}{X_C} + j \left(RI_{ob} + XI_{oc} + \frac{U_{of} R}{X_C} \right) = \underline{U}_{zf}$$

Z warunków zadania wynika, że fazowe napięcie zasilające i napięcie fazowe na odbiorniku mają jednakowe wartości skuteczne. Po podstawieniu danych liczbowych i dokonaniu odpowiednich działań uzyskamy:

$$9536 - \frac{95263}{X_C} + j \left(269 + \frac{69282}{X_C} \right) = 8660 e^{j\varphi}.$$

Kąt φ określa przesunięcie fazowe między napięciami $\underline{U}_{of}$ i $\underline{U}_{zf}$ i nie jest znany, dlatego w dalszej części rozwiązania przyrównamy do siebie jedynie moduły liczb zespolonych:

$$\sqrt{\left(9536 - \frac{95263}{X_C} \right)^2 + \left(269 + \frac{69282}{X_C} \right)^2} = 8660$$

Po podniesieniu obu stron tej równości do kwadratu, dokonaniu odpowiednich przekształceń i uproszczeń otrzymujemy równanie kwadratowe:

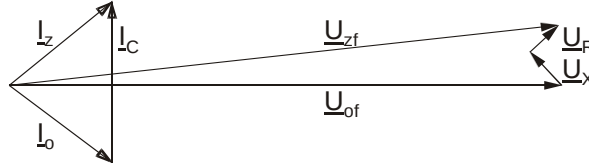
$$X_C^2 - 111,18 X_C + 866,86 = 0.$$

W wyniku jego rozwiązania mamy: $X_{C1} = 8,44 \Omega$, $X_{C2} = 102,74 \Omega$.

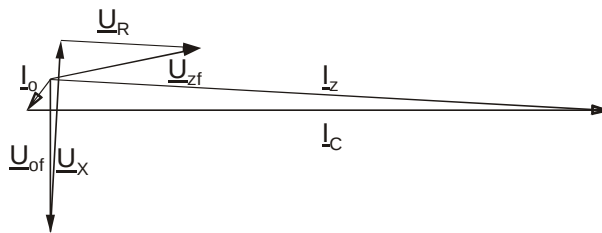
Na tej podstawie obliczamy dwie pojemności spełniające warunki zadania:

$$C_Y^{(1)} = \frac{1}{2\pi f X_{C1}}, \quad C_Y^{(2)} = \frac{1}{2\pi f X_{C2}}.$$

Odpowiedź: $C_Y = 31 \mu F$ lub $C_Y = 377,5 \mu F$. Wykres fazorowy dla $C_Y = 31 \mu F$ przedstawia rys. 9.14.II. Wykres fazorowy dla $C_Y = 377,5 \mu F$, przedstawiony na rys. 9.14.III, wykonano przyjmując fazę napięcia na odbiorniku równą -90°



Rys. 9.14.II



Rys. 9.14.III

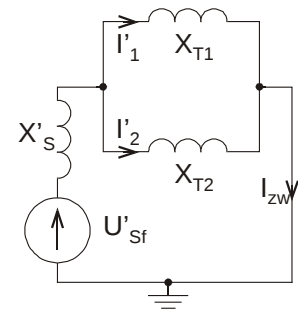
Zadanie 9.37

Odpowiedź: $C_\Delta = 583 \mu F$.

Zadanie 9.38

Rozwiązanie:

Schemat zastępczy układu dla jednej fazy przedstawiono na rys. 9.15.I. Oznaczono na nim wartości skuteczne prądów (symbole nie podkreślone). Układ zawiera wyłącznie reaktancje indukcyjne i w takim przypadku prądy we wszystkich gałęziach mają tę samą fazę początkową. Z tego powodu obliczenia można wykonać dla wartości skutecznych, posługując się jedynie reaktancjami elementów, zamiast ich impedancjami.



Rys. 9.15.I

Parametry schematu zastępczego sprowadzono do napięcia 115 kV:

- napięcie fazowe systemu sprowadzone

$$U'_{Sf} = \frac{U_s}{\sqrt{3}} \frac{1}{9_1} = 66,4 \text{ kV},$$

- reaktancja systemu sprowadzona

$$X'_S = \frac{U_s^2}{S_{zw}} \frac{1}{9_1^2} = 13,23 \Omega,$$

- reaktancja transformatora 1

$$X_{T1} = \frac{u_{z1\%}}{100} \frac{(U_{T1n}^{(DN)})^2}{S_{T1n}} = 4,13 \Omega,$$

- reaktancja transformatora 2

$$X_{T2} = \frac{u_{z2\%}}{100} \frac{(U_{T2n}^{(DN)})^2}{S_{T2n}} = 5,29 \Omega.$$

Całkowita reaktancja obwodu zwarciego jest równa:

$$X_z = X'_s + \frac{X_{T1} \cdot X_{T2}}{X_{T1} + X_{T2}} = 15,55 \Omega.$$

Prąd zwarcia wynosi:

$$I_{zw} = \frac{U'_s}{X_z} = 4,27 \text{ kA}.$$

Prądy w transformatorach obliczamy korzystając ze wzoru na dzielnik prądu:

$$I'_1 = I_{zw} \frac{X_{T2}}{X_{T1} + X_{T2}} = 2,4 \text{ kA}$$

$$I'_2 = I_{zw} - I'_1 = 1,87 \text{ kA}$$

W rozważanym przypadku obliczenia można wykonać bezpośrednio na modułach prądów, gdyż ze względu na jednakowy charakter wszystkich gałęzi, mają tę samą fazę początkową.

Obliczone wartości prądów transformatorów są sprowadzone na stronę 115 kV. Po stronie 400 kV ich wartości będą równe:

$$I_1 = I'_1 \frac{1}{g_1}, \quad I_2 = I'_2 \frac{1}{g_2}$$

Odpowiedź: $I_{zw}=4,27 \text{ kA}$, $I_1=690 \text{ A}$, $I_2=540 \text{ A}$.

Zadanie 9.39

Odpowiedź: $I_{zw}=866 \text{ A}$, $I_{G1}=4,38 \text{ kA}$, $I_{G2}=8,58 \text{ kA}$

Zadanie 9.40

Odpowiedź: $I_{zw}=6,84 \text{ kA}$, $I_{s1}=507,8 \text{ A}$, $I_{s2}=216,6 \text{ A}$.

Zadanie 9.41

Odpowiedź: $I_{zw}=6,56 \text{ kA}$, $I_{sys}=1,12 \text{ kA}$, $I_{gen}=37,9 \text{ kA}$.

Zadanie 9.42

Odpowiedź: $I_{zw}=68,5 \text{ kA}$, $I_{s1}=1,84 \text{ kA}$, $I_{s2}=522 \text{ A}$.

Zadanie 9.43

Rozwiązanie:

Schemat zastępczy układu dla jednej fazy, przedstawiony na rys. 9.16.I, został sprowadzony do strony pierwotnej transformatorów (napięcie 15 kV). Parametry schematu mają następujące wartości:

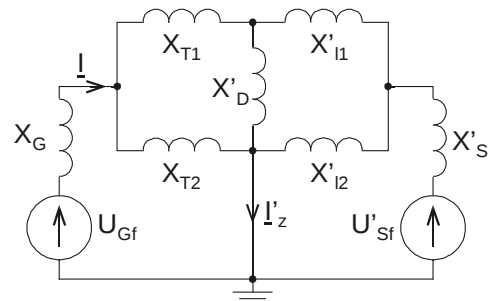
- napięcie fazowe generatora

$$U_{Gf} = \frac{U_{zG}}{\sqrt{3}} = 10,39 \text{ kV}$$

- reaktancja generatora

$$X_G = \frac{x_{G\%}}{100} \frac{U_{Gn}^2}{S_{Gn}} = 0,225 \Omega,$$

- reaktancje transformatorów



Rys. 9.16.I

$$X_{T1} = X_{T2} = \frac{u_{z\%}}{100} \frac{U_{1n}^2}{S_{Tn}} = 0,169 \, \Omega,$$

- reaktancje linii napowietrznych sprowadzone

$$X'_{l1} = X'_{l2} = l \cdot X_l \left(\frac{U_{1n}}{U_{2n}} \right)^2 = 0,372 \, \Omega,$$

- napięcie fazowe systemu sprowadzone

$$U'_{Sf} = \frac{U_{Sn}}{\sqrt{3}} \frac{U_{1n}}{U_{2n}} = 8,66 \, \text{kV},$$

- reaktancja systemu sprowadzona

$$X'_S = \frac{U_{Sn}^2}{S_z} \left(\frac{U_{1n}}{U_{2n}} \right)^2 = 0,112 \, \Omega.$$

W celu zmniejszenia liczby węzłów można gwiazdę reaktancji X_{T1} – X_{l1} – X_D zamienić na trójkąt, co prowadzi do układu przedstawionego na rys. 9.16.II. Wartości reaktancji zastępczego trójkąta są następujące:

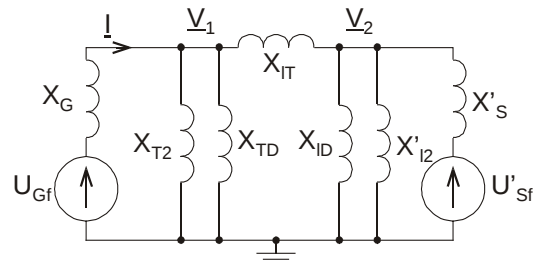
$$X_{TD} = X_{T1} + X_D + \frac{X_{T1}X_D}{X_{l1}} = 0,289 \, \Omega,$$

$$X_{IT} = X_{T1} + X_{l1} + \frac{X_{T1}X_{l1}}{X_D} = 1,3 \, \Omega,$$

$$X_{DI} = X_D + X_{l1} + \frac{X_D X_{l1}}{X_{T1}} = 0,637 \, \Omega,$$

Przekształcony w ten sposób obwód rozwiązujemy metodą potencjałów węzłowych:

$$\begin{cases} V_1 \left(\frac{1}{X_G} + \frac{1}{X_{T2}} + \frac{1}{X_{TD}} + \frac{1}{X_{IT}} \right) - \frac{V_2}{X_{IT}} = \frac{U_{Gf}}{X_G} \\ V_2 \left(\frac{1}{X'_S} + \frac{1}{X_{l2}} + \frac{1}{X_{ID}} + \frac{1}{X_{IT}} \right) - \frac{V_1}{X_{IT}} = \frac{U'_{Sf}}{X'_S} \end{cases}$$



Rys. 9.16.II

Ze względu na to, że obwód spośród elementów biernych zawiera wyłącznie reaktancje indukcyjne, przy formułowaniu układu równań można posługiwać się samymi reaktancjami elementów, zamiast ich impedancjami. Dlatego w równaniach układu nie występuje jednostka urojona „j”. Założono ponadto, że między napięciami źródłowymi nie ma przesunięcia fazowego, co pozwala przyjąć zerowy kąt fazowy każdego z tych napięć.

W wyniku rozwiązywania powyższego układu równań otrzymujemy:

$$\underline{V}_1 = 5,723 \, \text{kV}, \quad \underline{V}_2 = 3,465 \, \text{kV}.$$

Prąd generatora obliczamy z równości:

$$\underline{I} = \frac{U_{Gf} - \underline{V}_1}{jX_G} = -j30,79 = 30,79e^{-j90^\circ} \, \text{kA}.$$

Odpowiedź: $I=30,8 \, \text{kA}$

Zadanie 9.44

Odpowiedź: $I_{zw}=8285 \, \text{A}$, $I_{G1}=1205 \, \text{A}$, $I_{G2}=1832 \, \text{A}$, $I_{G3}=1727 \, \text{A}$.

Zadanie 9.45*Rozwiązanie:*

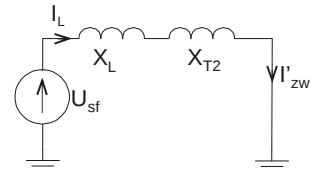
Z danych zadania wynika, że reaktancja systemu elektroenergetycznego jest równa zero. Dlatego napięcie na szynach, do których jest dołączony transformator T_1 , linia L oraz system jest równe napięciu systemu. Stąd schemat zastępczy układu dla jednej fazy, przedstawiony na rys. 9.17.I, nie zawiera układów zastępczych generatora i transformatora T_1 , jako elementów nie mających wpływu na wartość obliczanych prądów.

Parametry schematu zastępczego sprowadzono do napięcia 110 kV:

- napięcie fazowe systemu $U_{sf} = \frac{U_s}{\sqrt{3}} = \frac{110}{\sqrt{3}} = 63,5 \text{ kV}$,

- reaktancja transformatora 2

$$X_{T2} = \frac{u_{z2\%}}{100} \frac{(U_{T2n}^{(110)})^2}{S_{T2n}} = \frac{8}{100} \frac{(110 \cdot 10^3)^2}{60 \cdot 10^6} = 16,13 \Omega,$$



Rys. 9.17.I

- reaktancja linii L

$$X_L = l \cdot x_l = 50 \cdot 0,4 = 20 \Omega.$$

Prąd w linii L wynosi:

$$I_L = \frac{U_{sf}}{X_L + X_{T2}} = \frac{63,5}{20 + 16,13} = 1,758 \text{ kA}.$$

Prąd w miejscu zwarcia wynosi:

$$I_{zw} = I_L \vartheta_2 = 1,758 \frac{110}{60} = 3,223 \text{ kA}$$

Odpowiedź: $I_L = 1,758 \text{ kA}$, $I_{zw} = 3,223 \text{ kA}$.

Zadanie 9.46*Rozwiązanie:*

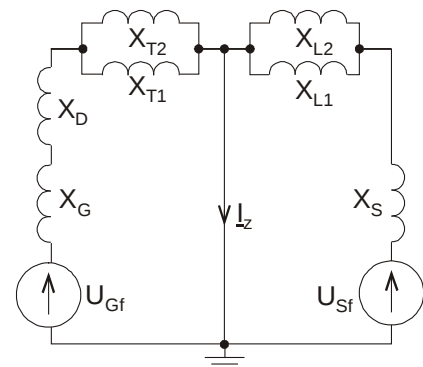
Schemat zastępczy układu dla jednej fazy przedstawiono na rys. 9.18.I. Parametry schematu zastępczego sprowadzono do napięcia, przy którym nastąpiło zwarcie, czyli 110 kV:

- reaktancja transformatora 1

$$X_{T1} = \frac{u_{z2\%}}{100} \frac{(U_{T1n})^2}{S_{T1n}} = \frac{11}{100} \frac{(110 \cdot 10^3)^2}{125 \cdot 10^6} = 10,65 \Omega,$$

- reaktancja transformatora 2

$$X_{T2} = \frac{u_{z2\%}}{100} \frac{(U_{T2n})^2}{S_{T2n}} = \frac{11}{100} \frac{(110 \cdot 10^3)^2}{100 \cdot 10^6} = 13,31 \Omega,$$



Rys. 9.18.I

- reaktancja dławika

$$X_D = \frac{u_{D\%}}{100} \frac{U_{Dn}}{I_{Dn}} \vartheta_1^2 = \frac{6}{100} \frac{15 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} \left(\frac{110}{10} \right)^2 = 3,14 \Omega,$$

- reaktancja generatora

$$X_G = \frac{u_{G\%}}{100} \frac{(U_{Gn})^2}{S_{Gn}} \vartheta^2 = \frac{25}{100} \frac{(11 \cdot 10^3)^2}{200 \cdot 10^6} \left(\frac{110}{10} \right)^2 = 18,30 \Omega,$$

- reaktancja systemu

$$X_S = \frac{U_S^2}{S_{zw}} = \frac{(110 \cdot 10^3)^2}{800 \cdot 10^6} = 15,13 \Omega$$

- reaktancje linii napowietrznych

$$X_{L1} = X_{L2} = l \cdot x_{l\%} = 30 \cdot 0,4 = 12 \Omega,$$

- napięcie fazowe generatora

$$U_{Gf} = e_G \frac{U_{Gn}}{\sqrt{3}} \vartheta_1 = 1,1 \frac{11}{\sqrt{3}} \left(\frac{110}{10} \right) = 76,85 \text{ kV}.$$

- napięcie fazowe systemu

$$U_{Sf} = \frac{U_S}{\sqrt{3}} = \frac{110}{\sqrt{3}} = 63,51 \text{ kV}$$

- Reaktancja zastępcza połączenia równoległego transformatorów:

$$X_{T12} = \frac{X_{T1} \cdot X_{T2}}{X_{T1} + X_{T2}} = \frac{10,65 \cdot 13,31}{10,65 + 13,31} = 5,92 \Omega.$$

- Reaktancja zastępcza połączenia równoległego linii L_1 i L_2 :

$$X_{L_{12}} = \frac{X_{L1} \cdot X_{L2}}{X_{L1} + X_{L2}} = \frac{12 \cdot 12}{12 + 12} = 6 \Omega$$

Prąd generatora sprowadzony na stronę wysokiego napięcia jest równy:

$$I_1 = \frac{U_{Gf}}{X_G + X_D + X_{T12}} = \frac{76,85}{18,3 + 3,14 + 5,92} = 2,81 \text{ kA}$$

Prąd systemu elektroenergetycznego wynosi:

$$I_2 = \frac{U_{Sf}}{X_S + X_{L12}} = \frac{63,51}{15,13 + 6} = 3 \text{ kA}.$$

Prąd zwarcia obliczamy z pierwszego praw Kirchhoffa:

$$I_Z = I_1 + I_2$$

Prąd generatora obliczamy przeliczając prąd I_1 na stronę pierwotną transformatorów:

$$I_G = I_1 \cdot \vartheta_1$$

Odpowiedź: Prąd zwarcia $I_Z = 5,81 \text{ kA}$, prąd generatora $I_G = 30,91 \text{ kA}$.

Zadanie 9.47

Rozwiązanie:

Schemat zastępczy układu dla jednej fazy przedstawiono na rys. 9.19.I. Parametry schematu zastępczego sprowadzono do napięcia 220 kV:

- napięcie fazowe generatora

$$U_{Gf} = e_G \frac{U_{Gn}}{\sqrt{3}} \vartheta_1 = 1,1 \left(\frac{15 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{220}{15} \right) = 139,72 \text{ kV},$$

- reaktancja generatora

$$X_G = \frac{x_{G\%}}{100} \frac{U_{Gn}^2}{S_{Gn}} g_1^2 = \frac{21}{100} \frac{(15 \cdot 10^3)^2}{100 \cdot 10^6} \left(\frac{220}{15} \right)^2 = 101,64 \, \Omega,$$

- napięcie fazowe systemu elektroenergetycznego 1

$$U_{S1f} = \frac{U_{S1}}{\sqrt{3}} = \left(\frac{220 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} \right) = 127,02 \, \text{kV}$$

- reaktancja systemu elektroenergetycznego 1

$$X_{S1} = \frac{U_{S1}^2}{S_{zw1}} = \frac{(220 \cdot 10^3)^2}{1000 \cdot 10^6} = 48,4 \, \Omega,$$

- napięcie fazowe systemu elektroenergetycznego 2

$$U_{S2f} = \frac{U_{S2}}{\sqrt{3}} g_2 = \left(\frac{110 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{220}{110} \right) = 127,02 \, \text{kV}$$

- reaktancja transformatora 1

$$X_{T1} = \frac{u_{z1\%}}{100} \frac{(U_{T1n})^2}{S_{T1n}} = \frac{10}{100} \frac{(220 \cdot 10^3)^2}{100 \cdot 10^6} = 48,40 \, \Omega,$$

- reaktancja transformatora 2

$$X_{T2} = \frac{u_{z2\%}}{100} \frac{(U_{T2n})^2}{S_{T2n}} = \frac{10}{100} \frac{(220 \cdot 10^3)^2}{200 \cdot 10^6} = 29,04 \, \Omega,$$

- reaktancje linii napowietrznych:

$$X_{L1} = l_1 \cdot x_1 = 100 \cdot 0,4 = 40 \, \Omega,$$

$$X_{L2} = X_{L3} = l_2 \cdot x_2 = 80 \cdot 0,4 = 32 \, \Omega.$$

Powstały obwód rozwiązujemy metodą potencjałów węzłowych:

$$\begin{cases} \underline{V}_1 \left(\frac{1}{X_{L1}} + \frac{1}{X_{L3}} + \frac{1}{X_{S1}} \right) - \frac{\underline{V}_2}{X_{L3}} = \frac{U_{S1f}}{X_{S1}} \\ \underline{V}_2 \left(\frac{1}{X_{T2}} + \frac{1}{X_{L2}} + \frac{1}{X_{L3}} \right) - \frac{\underline{V}_1}{X_{L3}} = \frac{U_{S2f}}{X_{T2}} \end{cases}$$

Ze względu na to, że w obwodzie elementami biernymi są wyłącznie reaktancje indukcyjne, przy formułowaniu układu równań można posługiwać się samymi reaktancjami elementów, zamiast ich impedancjami. Dlatego w równaniach układu nie występuje jednostka urojona „j”.

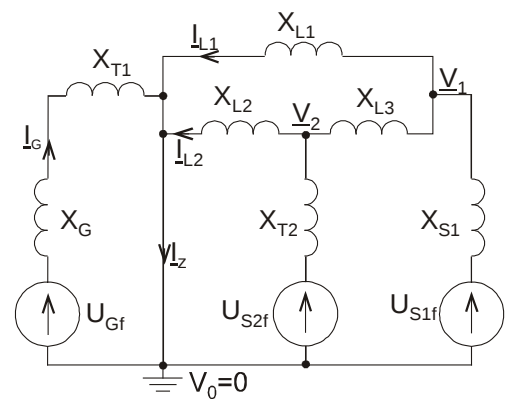
W wyniku rozwiązania powyższego układu równań otrzymujemy:

$$\underline{V}_1 = 60,364 \, \text{kV}, \quad \underline{V}_2 = 64,615 \, \text{kV}.$$

- prądy w liniach L_1 i L_2 i prąd generatora obliczamy z równości:

$$I_{L1} = \frac{\underline{V}_1}{jX_{L1}} = 1,509 \, \text{kA},$$

$$I_{L2} = \frac{\underline{V}_2}{jX_{L2}} = 2,019 \, \text{kA},$$



Rys. 9.19.I

$$\underline{I}_G = \frac{\underline{U}_{Gf}}{j(X_G + X_{T1})} = 0,931 \text{ kA},$$

- prąd w miejscu zwarcia jest obliczany na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$\underline{I}_Z = \underline{I}_G + \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} = -j4,459 = 4,459e^{-j90^\circ} \text{ kA}.$$

Odpowiedź: $I_Z = 4,459 \text{ kA}$.

10. OBWODY TRÓJFAZOWE NIESYMETRYCZNE

Zadanie 10.1

Rozwiązanie:

Przy założeniu, że punkt gwiazdowy źródła ma potencjał elektryczny równy zero, potencjał punktu gwiazdowego odbiornika jest równy (rys. 10.1.I):

$$\underline{V} = \frac{\frac{-\underline{U}_A}{\underline{Z}} + \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}} + \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}}}{\frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{jX}} = -55,44 - j42,24 \text{ V}$$

Prądy w poszczególnych gałęziach obwodu są równe:

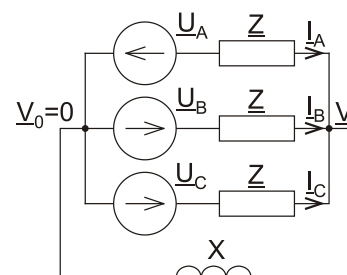
$$\underline{I}_A = \frac{-\underline{U}_A - \underline{V}}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B - \underline{V}}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C - \underline{V}}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_0 = \frac{\underline{V}}{jX}$$

Moc odbiornika obliczamy jako część rzeczywistą sumarycznej mocy pozornej trzech faz odbiornika:

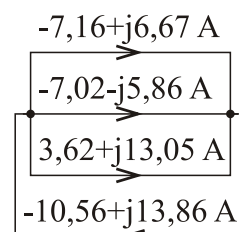
$$P_{\text{odb}} = \text{Re}\{\underline{I}_A^2 \underline{Z} + \underline{I}_B^2 \underline{Z} + \underline{I}_C^2 \underline{Z}\}$$

W przypadku prawidłowego połączenia moc czynną odbiornika można wyznaczyć następująco:

$$P_{\text{odb}} = \text{Re}\left\{3 \frac{\underline{U}_A^2}{\underline{Z}^*}\right\}$$



Rys. 10.1.I



Rys. 10.1.II

Odpowiedź: Przy błędnym połączeniu $P_{\text{odb}}=5,81 \text{ kW}$, przy prawidłowym połączeniu $P_{\text{odb}}=7,54 \text{ kW}$. Rozpływ prądów podano na grafie – rys. 10.1.II.

Zadanie 10.2

Rozwiązanie:

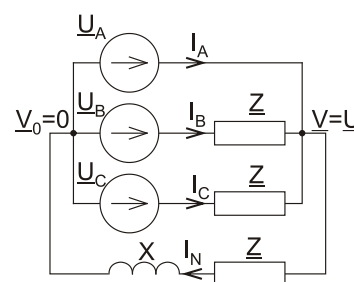
Jeżeli uziemy punkt gwiazdowy źródła – rys. 10.2.I, to potencjał punktu gwiazdowego odbiornika będzie równy napięciu źródła w fazie a. Prądy w obwodzie obliczamy następująco:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_A}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C - \underline{U}_A}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_N = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z} + jX}, \quad \underline{I}_A = \underline{I}_N - \underline{I}_B - \underline{I}_C$$

Moc pozorna odbiorników i moc pozorna źródła są równe:

$$\underline{S}_{\text{odb}} = \underline{I}_B^2 \underline{Z} + \underline{I}_C^2 \underline{Z} + \underline{I}_N^2 (jX + \underline{Z}), \quad \underline{S}_z = \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^*$$

Odpowiedź: $\underline{I}_A=48,62e^{-j31,58^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_B=21,7e^{-j179,36^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_C=21,7e^{j120,64^\circ} \text{ A}$,
 $\underline{I}_N=11,16e^{-j39,09^\circ} \text{ A}$,
 $\underline{S}_z=\underline{S}_{\text{odb}}=17,1+j10,1 \text{ kV}\cdot\text{A}$.

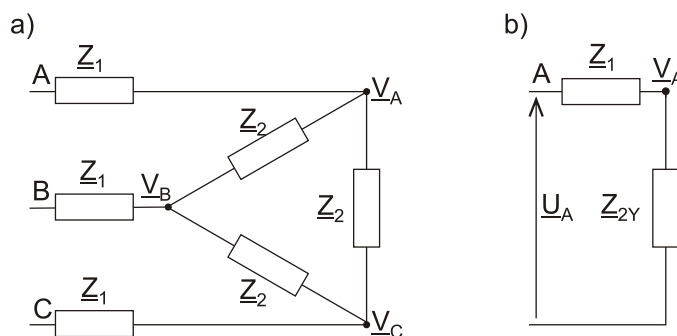


Rys. 10.2.I

Zadanie 10.3

Rozwiązanie:

Warunki zadania – relacja pomiędzy wartościami impedancji $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ a rezystancjami woltomierzy – pozwalają pominąć wpływ woltomierzy na wartości potencjałów $\underline{V}_A$, $\underline{V}_B$, $\underline{V}_C$, w węzłach trójkąta impedancji $\underline{Z}_2$. Potencjały te można obliczyć rozwiązując symetryczny układ trójfazowy utworzony przez impedancje $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ – rys. 10.3.Ia.



Rys. 10.3.I

Potencjał $\underline{V}_A$ określamy z dzielnika napięcia utworzonego przez impedancje w fazie A (rys. 10.3.Ib), po uprzedniej zamianie trójkąta impedancji $\underline{Z}_2$ na symetryczną gwiazdę impedancji $\underline{Z}_{2Y}$:

$$\underline{Z}_{2Y} = \frac{\underline{Z}_2}{3} = 8 + j6 \, \Omega,$$

$$\underline{V}_A = \underline{U}_A \frac{\underline{Z}_{2Y}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{2Y}} = \frac{\underline{U}}{\sqrt{3}} \frac{\underline{Z}_{2Y}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{2Y}} = 202,07 - j28,87 = 204,12e^{-j8,13^\circ} \text{ V}.$$

Pozostałe potencjały są równe:

$$\underline{V}_B = \underline{V}_A e^{-j120^\circ} = -126,04 - j160,57 \text{ V}, \quad \underline{V}_C = \underline{V}_A e^{j120^\circ} = -76,04 + j189,43 \text{ V}.$$

Potencjał punktu gwiazdowego woltomierzy obliczamy metodą potencjałów węzłowych (rys. 10.3.II):

$$\underline{V} = \frac{\frac{\underline{V}_A}{R_{V1}} + \frac{\underline{V}_B}{R_{V2}} + \frac{\underline{V}_C}{R_{V3}}}{\frac{1}{R_{V1}} + \frac{1}{R_{V2}} + \frac{1}{R_{V3}}} = 29,54 + j7,18 \text{ V}.$$

Woltomierze wskazują różnice potencjałów punktów, do których są przyłączone. Wartości zespolone napięć woltomierzy są równe:

$$\underline{U}_{V1} = \underline{V}_A - \underline{V} = 172,53 - j36,05 = 176,26e^{-j11,8^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_{V2} = \underline{V}_C - \underline{V} = -105,58 + j182,26 = 228,79e^{-j132,85^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_{V3} = \underline{V}_B - \underline{V} = -155,58 - j167,74 = 210,63e^{j120,08^\circ} \text{ V},$$

W przypadku woltomierzy idealnych tworzą one układ symetryczny i potencjał $\underline{V}=0$. Wskazania woltomierzy są wtedy równe potencjałom węzłów trójkąta impedancji $\underline{Z}_2$.

Odpowiedź: $U_{V1}=176,3 \text{ V}$, $U_{V2}=228,8 \text{ V}$, $U_{V3}=210,6 \text{ V}$.

Idealne woltomierze wskażą $U_{V1}=U_{V2}=U_{V3}=204,1 \text{ V}$.

Zadanie 10.4

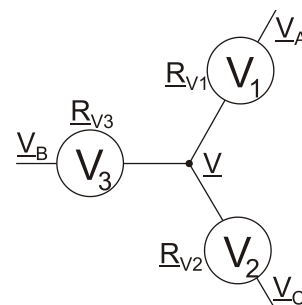
Odpowiedź: a) $U_{V1}=44,3 \text{ V}$, $U_{V2}=57,5 \text{ V}$, $U_{V3}=53 \text{ V}$.

b) $U_{V1}=U_{V2}=U_{V3}=51,3 \text{ V}$.

Zadanie 10.5

Wskazówka: Prądy płynące przez elementy R , X_L i X_C można obliczyć korzystając ze znajomości napięć przewodowych $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$, $\underline{U}_{CA}$, (bez zamiany trójkąta na równoważną gwiazdę), zaś prądy woltomierzy obliczamy jako różnicę odpowiednich prądów w gałęziach trójkąta.

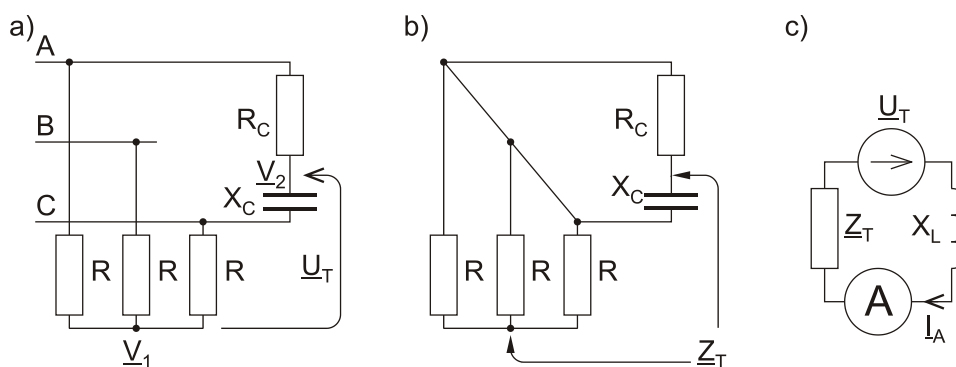
Odpowiedź: $P_{W1}=P_{W2}=7,22 \text{ kW}$, $P=14,44 \text{ kW}$, $Q=0$



Rys. 10.3.II

Zadanie 10.6*Rozwiązanie:*

Przy obliczeniu prądu amperomierza można skorzystać z tw. Thevenina. Usuwamy z obwodu gałąź z amperomierzem – rys. 10.6.Ia.



Rys. 10.6.I

Punkty obwodu do których była dołączona mają potencjały:

$\underline{V}_1=0$ – potencjał punktu gwiazdowego odbiornika trójfazowego symetrycznego, oraz

$$\underline{V}_2 = \underline{U}_C - \underline{U}_{CA} \frac{-jX_C}{R_C - jX_C} = -40,15 - j69,55 \text{ V}$$

Napięcie Thevenina jest równe:

$$\underline{U}_T = \underline{V}_2 - \underline{V}_1 = \underline{V}_2$$

Impedancję Thevenina obliczamy w sytuacji, gdy przewody wszystkich trzech faz są zwarte w miejscu zasilania przez zerowe impedancje źródła (rys. 10.6.Ib):

$$\underline{Z}_T = \frac{R}{3} + \frac{-jX_C R_C}{R_C - jX_C} = 150 - j50 \Omega$$

Prąd płynący przez amperomierz w schemacie zastępczym na rys. 10.6.Ic jest równy:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + jX_L} = -0,27 - j0,46 \text{ A} = 0,54e^{-j120^\circ} \text{ A}$$

Odpowiedź: amperomierz wskaże 0,54 A.

Zadanie 10.7

Wskazówka: Należy wyznaczyć potencjały obydwu węzłów do których dołączony jest woltomierz – zwrócić uwagę na równość reaktancji X_{L1} , X_{C1} oraz X_{L3} , X_{C3} (rezonans), co znacznie upraszcza obliczenia. Przy obliczeniu prądu amperomierza napięcie woltomierza staje się napięcie zastępczego źródła napięciowego (tw. Thevenina); trzeba jeszcze obliczyć impedancję tego źródła – istnienie zależności odpowiadających stanowi rezonansu znacznie upraszcza to obliczenie.

Odpowiedź: $U_V=197,3 \text{ V}$, po dołączeniu amperomierza $I_A=1,79 \text{ A}$, $U_V=17,9 \text{ V}$

Zadanie 10.8

Odpowiedź: $P_{W1}=1600\text{W}$, $P_{W2}=0\text{W}$, $I_1=4 \text{ A}$, $I_2=5,82 \text{ A}$, $I_3=2 \text{ A}$,
 $P=1600 \text{ W}$, $Q=800 \text{ var}$, $S=1789 \text{ VA}$.

Zadanie 10.9

Odpowiedź: $I_{A1}=1,92 \text{ A}$, $I_{A2}=1,23 \text{ A}$, $I_{A3}=0,79 \text{ A}$, $U_{V1}=218,5 \text{ V}$, $U_{V2}=376,3 \text{ V}$.

Zadanie 10.10

Odpowiedź: $I_{A1}=1,725\text{ A}$, $I_{A2}=2,255\text{ A}$, $I_{A3}=2,69\text{ A}$, $I_{A4}=1\text{ A}$, $I_{A5}=1,333\text{ A}$, $I_{A6}=2\text{ A}$, $I_{A7}=0,8\text{ A}$.

Zadanie 10.11

Odpowiedź: $I_{A1}=2,2\text{ A}$, $I_{A2}=1,467\text{ A}$, $P_W=-37,5\text{ VA}$.

Zadanie 10.12

Wskazówka: Należy napisać równania prądowe, ale dla prądów w przewodach zasilających (będących różnicami prądów dwóch sąsiednich gałęzi trójkąta odbiorczego) znane są tylko moduły prądów, a nie ich kąty fazowe. Można założyć kąt fazowy np. równy zero dla jednego z szukanych prądów odbiornika. Ponadto należy skorzystać z faktu, że suma napięć w trójkącie jest równa zero (zarówno część rzeczywista, jak i urojona).

Odpowiedź: $I_{ab}=2,87\text{ A}$, $I_{bc}=8,46\text{ A}$, $I_{ca}=7,46\text{ A}$

Zadanie 10.13

Odpowiedź: Przed zwarcie $I_a=I_b=I_c=3,67\text{ A}$,
po zwarcu $I_a=7,81\text{ A}$, $I_b=6,14\text{ A}$, $I_c=4,16\text{ A}$, $I_z=7,21\text{ A}$.

Zadanie 10.14

Odpowiedź: $I_{ab1}=7,35\text{ A}$, $I_{ab2}=4,81\text{ A}$, $I_{bc1}=4,81\text{ A}$, $I_{bc2}=7,35\text{ A}$, $I_{ca}=5,56\text{ A}$,
 $I_a=12,1\text{ A}$, $I_b=9,62\text{ A}$, $I_c=12,1\text{ A}$.

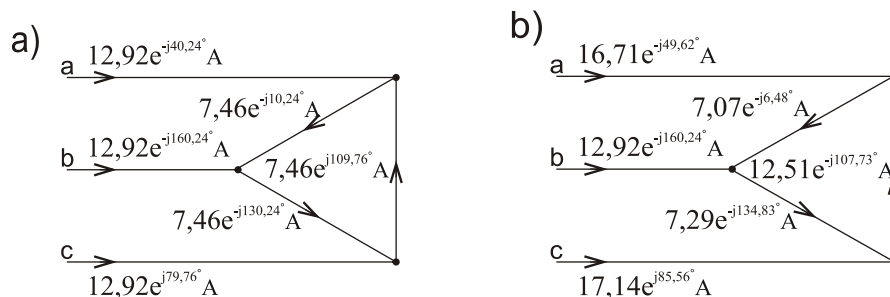
Zadanie 10.15

Wskazówka: Na podstawie danych znamionowych należy wyznaczyć parametry schematu zastępczego dla każdego z odbiorników i obliczyć potencjał punktu, do którego są dołączone. Pozwoli to obliczyć rzeczywiste napięcie na każdym odbiorniku.

Odpowiedź: Odb₁ $U_1=336,1\text{ V}$, $I_1=2,22\text{ A}$, $P_1=641\text{ W}$
Odb₂ $U_2=303,3\text{ V}$, $I_2=8,6\text{ A}$, $P_2=2086\text{ W}$
Odb₃ $U_3=99,3\text{ V}$, $I_3=9,14\text{ A}$, $P_3=672\text{ W}$

Zadanie 10.16

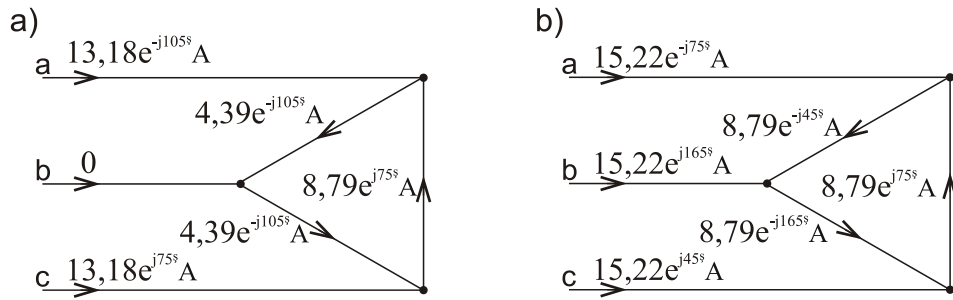
Odpowiedź: Przed wystąpieniem uszkodzenia: $P=5\text{ kW}$, $Q=3,5\text{ kvar}$, wartości prądów podano na grafie – rys. 10.16.Ia.
Po wystąpieniu uszkodzenia: $P=5,44\text{ kW}$, $Q=3,8\text{ kvar}$, wartości prądów podano na grafie – rys. 10.16.Ib.



Rys. 10.16.I

Zadanie 10.17

Odpowiedź: Wartości prądów podano na grafie: dla styków zamkniętych w fazie A i C na rys. 10.17.Ia, dla styków zamkniętych we wszystkich fazach na rys. 10.17.Ib.



Rys. 10.17.I

Zadanie 10.18

Odpowiedź: faza ab ciągła: $I_{A1} = I_{A2} = I_{A3} = 25,6 \text{ A}$, $P_{W1} = 4,02 \text{ kW}$, $P_{W2} = 9,67 \text{ kW}$,
 faza ab przerwana: $I_{A1} = 14,8 \text{ A}$, $I_{A2} = 16,1 \text{ A}$, $I_{A3} = 25,5 \text{ A}$, $P_{W1} = 29 \text{ W}$,
 $P_{W2} = 9,66 \text{ kW}$,

Zadanie 10.19

Wskazówka: Dogodnie jest zastąpić układ dany schematem zsłupczym bez sprzężeń indukcyjnych, po czym wyznaczyć potencjał punktu środkowego w powstałym układzie niesymetrycznej gwiazdy.

Odpowiedź: $I_a = 2,86 \text{ A}$, $\varphi_a = -86,26^\circ$, $I_b = 34,08 \text{ A}$, $\varphi_b = -112,83^\circ$, $I_c = 36,68 \text{ A}$, $\varphi_c = 69,16^\circ$.

METODA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH**Zadanie 10.20**

Rozwiązanie:

Napięcia przewodowe tworzą trójkąt. Przyjmujemy zerowy kąt fazowy napięcia $\underline{U}_{AB}$. Aby określić kąty fazowe pozostałych napięć obliczamy najpierw kąty φ_1 i φ_2 trójkąta między bokami $\underline{U}_{AB}$ i $\underline{U}_{BC}$ oraz między bokami $\underline{U}_{AB}$ i $\underline{U}_{CA}$, korzystając z twierdzenia cosinusów (rys. 10.20.I):

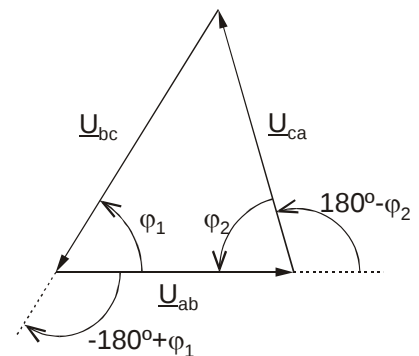
$$\varphi_1 = \arccos \left(\frac{U_{ab}^2 + U_{bc}^2 - U_{ca}^2}{2U_{ab}U_{bc}} \right) = 58,17^\circ,$$

$$\varphi_2 = \arccos \left(\frac{U_{ab}^2 + U_{ca}^2 - U_{bc}^2}{2U_{ab}U_{ca}} \right) = 74,44^\circ$$

Wartości zespolone napięć zasilających wynoszą:

$$\underline{U}_{ab} = 110e^{j0^\circ} \text{ V}, \quad \underline{U}_{bc} = 144e^{j(-180^\circ + \varphi_1)} = 144e^{-j121,83^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_{ca} = 127e^{j(180^\circ - \varphi_2)} = 127e^{j105,56^\circ} \text{ V}.$$



Rys. 10.20.I

Obliczamy składowe symetryczne układu napięć przewodowych:

$$\underline{U} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{AB} \\ \underline{U}_{BC} \\ \underline{U}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 125,64 - j12,09 \\ -15,64 + j12,09 \end{bmatrix} \text{ V, gdzie: } a = e^{j120^\circ}, \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$$

Składowe symetryczne napięć zasilających fazowych wynoszą:

$$\underline{U}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U_1}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} \\ \frac{U_2}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 59,33 - j42,31 \\ -11,31 + j1,53 \end{bmatrix} \text{ V}$$

Powyższe przeliczenie wynika stąd, że napięcia fazowe w układzie symetrycznym są $\sqrt{3}$ razy mniejsze od przewodowego, oraz dla składowej zgodnej napięcie fazy a opóźnia się za napięciem przewodowym między fazami a i b o 30° , a dla składowej przeciwnej wyprzedza je o 30° . Składowe symetryczne prądów fazowych są równe:

$$\underline{I}_f = \frac{1}{\underline{Z}} \underline{U}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,21 - j6,95 \\ -0,81 + j0,8 \end{bmatrix} \text{ A}$$

Na tej podstawie obliczamy prądy fazowe odbiornika:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \underline{I}_f = \begin{bmatrix} 1,4 - j6,14 \\ -7,41 + j0,46 \\ 6,01 + j5,69 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,6 e^{-j77,21^\circ} \\ 7,42 e^{j176,48^\circ} \\ 8,28 e^{j43,42^\circ} \end{bmatrix} \text{ A}$$

Odpowiedź: $I_A = 6,3 \text{ A}$, $I_B = 7,42 \text{ A}$, $I_C = 8,28 \text{ A}$

Zadanie 10.21

Rozwiązanie:

Suma prądów przewodowych musi być równa zeru, stąd prąd w fazie c jest równy:

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_A - \underline{I}_B = 0,01 + j15,75 \text{ A}$$

Składowe symetryczne prądów przewodowych wynoszą:

$$\underline{I} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9,24 - j4,33 \\ -5,27 - j2,03 \end{bmatrix} \text{ A, gdzie } a = e^{j120^\circ}, \underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Składowe symetryczne prądów fazowych odbiornika obliczamy, biorąc pod uwagę, że są one $\sqrt{3}$ razy mniejsze niż prądy przewodowe, oraz prąd w impedancji trójkąta włączonej między przewody faz a i b, dla składowej zgodnej, wyprzedza prąd w fazie a o kąt 30° a dla składowej przeciwnej, opóźnia się o 30° :

$$\underline{I}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I_1}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} \\ \frac{I_2}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5,87 + j0,5 \\ -3,22 + j0,51 \end{bmatrix} \text{ A}$$

Prądy w fazach odbiornika są równe:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{AB} \\ \underline{I}_{BC} \\ \underline{I}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \underline{I}_f = \begin{bmatrix} 2,65 + j1,01 \\ -1,33 - j8,38 \\ -1,32 + j7,37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,84 e^{j20,83^\circ} \\ 8,49 e^{-j99,03^\circ} \\ 7,49 e^{j100,16^\circ} \end{bmatrix} \text{ A}$$

Odpowiedź: $I_{AB} = 2,84 \text{ A}$, $I_{BC} = 8,49 \text{ A}$, $I_{CA} = 7,49 \text{ A}$

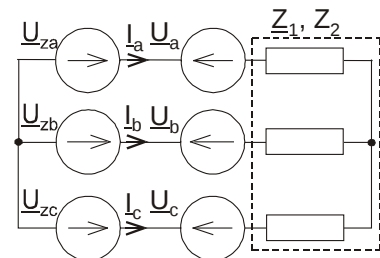
Zadanie 10.22

Odpowiedź: $I_A = I_B = 10,54 \text{ A}$, $I_C = 6,66 \text{ A}$

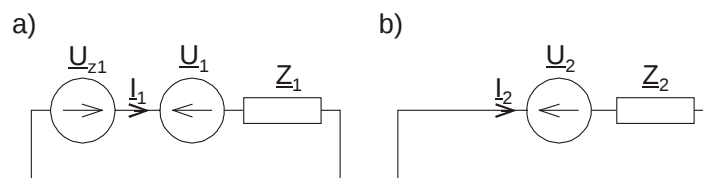
Zadanie 10.23

Rozwiązanie:

W miejscu uszkodzenia linii zasilającej odbiornik, zamiast przerwy w jednej fazie, wprowadzamy zastępcze niesymetryczne źródło trójfazowe – rys. 10.22.I. Napięcia fazowe $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ tego źródła rozkładamy na składowe symetryczne $\underline{U}_0$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$. Ze względu na to, że układzie trójfazowym trójprzewodowym nie występuje składowa zerowa prądu, budujemy schematy zastępcze tylko dla składowej zgodnej (rys. 10.22.IIa) i przeciwnej (rys. 10.22.IIb):



Rys. 10.22.I



Rys. 10.22.II

Na tej podstawie można zapisać następujące równania dla składowych symetrycznych:

$$(10.1) \quad \begin{aligned} \underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_1 &= \underline{U}_{z1} \\ \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Z obwodu wynikają następujące równości:

$$\underline{I}_A = 0, \quad \underline{U}_B = 0, \quad \underline{U}_C = 0$$

Zapisujemy je przy pomocy składowych symetrycznych:

$$(10.2) \quad \begin{aligned} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 &= 0 \\ \underline{U}_0 + a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 &= 0, \\ \underline{U}_0 + a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $a = e^{j120^\circ}$. Otrzymujemy w ten sposób układ pięciu równań (10.1)+(10.2) z pięcioma niewiadomymi. W wyniku jego rozwiązania mamy:

$$\underline{I}_1 = 31,72 - j25,99 \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = -31,72 + j25,99 \text{ A}, \quad \underline{U}_0 = \underline{U}_1 = \underline{U}_2 = 15,15 + j8,79 \text{ V}.$$

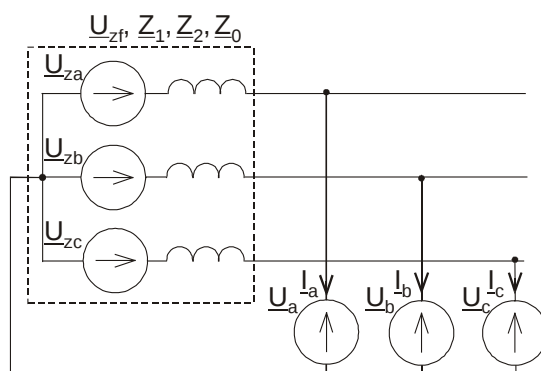
Dysponując wartościami składowych symetrycznych obliczamy poszukiwane prądy i napięcie:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -45,01 - j54,94 \\ 45,01 + j54,94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 71,03 e^{-j129,33^\circ} \\ 71,03 e^{j50,67^\circ} \end{bmatrix} \text{ A} \\ \underline{U}_p &= \underline{U}_A = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 45,36 + j26,37 = 52,55 e^{j30,12^\circ} \text{ V}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $I_B = I_C = 71 \text{ A}$, $U_p = 52,6 \text{ V}$

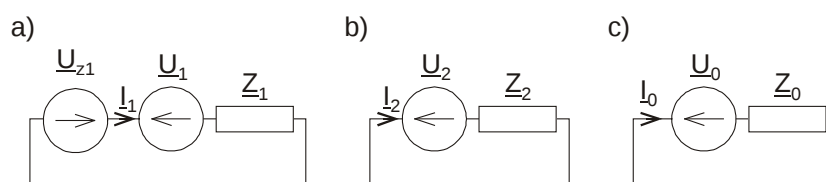
Zadanie 10.24*Rozwiązanie:*

W miejscu zwarcia wstawiamy zastępcze źródło trójfazowe niesymetryczne, jak to pokazano na rys. 10.23.I. Napięcia fazowe $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ tego źródła rozkładamy na składowe symetryczne $\underline{U}_0$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$.



Rys. 10.23.I

Następnie budujemy schematy zastępcze dla składowych symetrycznych, przedstawione na rys. 10.25.II.



Rys. 10.23.II

Wynikają z nich trzy równania:

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_1 &= \underline{U}_{z1} \\ \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 &= 0, \\ \underline{U}_0 + \underline{I}_0 \underline{Z}_0 &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $\underline{U}_{z1} = U_f e^{j0}$. Dodatkowe trzy równania, wynikające z obwodu:

$$\underline{U}_A = 0, \quad \underline{I}_B = 0, \quad \underline{I}_C = 0,$$

zapisujemy za pomocą składowych symetrycznych:

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 &= 0 \\ \underline{I}_0 + a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 &= 0, \\ \underline{I}_0 + a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $a = e^{j120^\circ}$. W wyniku rozwiązania otrzymanego układu sześciu równań (10.3)+(10.4) otrzymujemy:

$$\underline{U}_0 = -20 \text{ V}, \quad \underline{U}_1 = 60 \text{ V}, \quad \underline{U}_2 = -40 \text{ V}, \quad \underline{I}_0 = \underline{U}_1 = \underline{U}_2 = -j20 \text{ A}.$$

Prąd w fazie a jest równy:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = -j60 \text{ A}.$$

Napięcia fazowe zastępczego źródła wynoszą:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 + j86,6 \\ -30 - j86,6 \end{bmatrix} \text{ V}$$

Napięcia na woltomierzach są równe:

$$\underline{U}_{V1} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = \underline{U}_B, \quad \underline{U}_{V2} = \underline{U}_B - \underline{U}_C, \quad \underline{U}_{V3} = \underline{U}_C.$$

Odpowiedź: $I_A = 60 \text{ A}$, $U_{V1} = 91,7 \text{ V}$, $U_{V2} = 173,2 \text{ V}$, $U_{V3} = 91,7 \text{ V}$

Zadanie 10.25

Odpowiedź: $I_A = 34,6 \text{ A}$, $U_{V1} = 160 \text{ V}$, $U_{V2} = 240 \text{ V}$, $U_{V3} = 80 \text{ V}$

Zadanie 10.26

Odpowiedź: $U_V = 72 \text{ V}$, $I_{A1} = 275 \text{ A}$, $I_{A2} = 360 \text{ A}$

Zadanie 10.27

Odpowiedź: $I_A = (36,8 - j64,5) \text{ A}$, $I_B = (-11,7 + j17,7) \text{ A}$, $I_C = (-27,1 + j46,8) \text{ A}$

Zadanie 10.28

Odpowiedź: $U_0 = 60 \text{ V}$

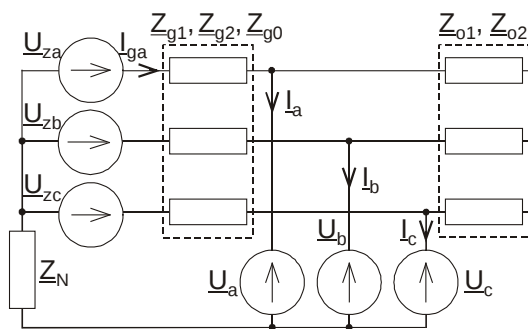
Zadanie 10.29

Odpowiedź: $I_A = 86,6 \text{ A}$, $I_B = 46,1 \text{ A}$, $I_C = 82,5 \text{ A}$

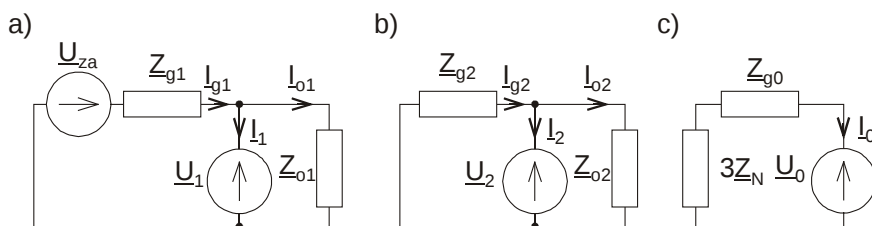
Zadanie 10.30

Rozwiązanie:

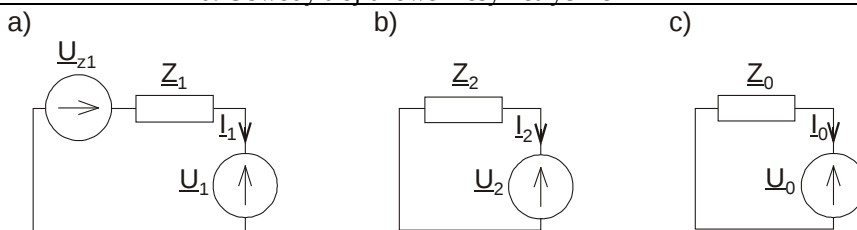
W miejscu powstania zwarcia, zamiast impedancji $\underline{Z}_z$, włączamy zastępcze źródło trójfazowe niesymetryczne połączone w gwiazdę – rys. 10.24.I. Napięcia fazowe $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ i prądy I_A , I_B , I_C tego źródła rozkładamy na składowe symetryczne $\underline{U}_0$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, I_0 , I_1 , I_2 . Schematy zastępcze dla składowych symetrycznych przedstawiono na rys. 10.24.II. Rys. 10.24.III przedstawia te schematy po ich uproszczeniu, do czego wykorzystano m. in. metodę Thevenina.



Rys. 10.24.I



Rys. 10.24.II



Rys. 10.24.III

$$\underline{U}_{z1} = U_{za} \frac{\underline{Z}_{o1}}{\underline{Z}_{o1} + \underline{Z}_{g1}} = 78 - j54 \text{ V}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{o2} \cdot \underline{Z}_{g2}}{\underline{Z}_{o2} + \underline{Z}_{g2}} = 0,14 + j0,35 \Omega$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{o1} \cdot \underline{Z}_{g1}}{\underline{Z}_{o1} + \underline{Z}_{g1}} = 2,03 + j2,93 \Omega$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{g0} + 3\underline{Z}_N = j2,5 \Omega$$

Ze schematów zastępczych wynikają trzy równania:

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{U}_1 &= \underline{U}_{z1} \\ \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 &= 0 \\ \underline{I}_0 \underline{Z}_0 + \underline{U}_0 &= 0 \end{aligned}$$

Dla obwodu trójfazowego w miejscu zwarcia można zapisać następujące równości:

$$\underline{U}_A = \underline{I}_A \underline{Z}_z, \quad \underline{I}_B = 0, \quad \underline{I}_C = 0,$$

które po wyrażeniu prądów i napięcia przez ich składowe symetryczne przybierają postać:

$$(10.6) \quad \begin{aligned} \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 &= (\underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2) \underline{Z}_z \\ \underline{I}_0 + a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 &= 0 \\ \underline{I}_0 + a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $a = e^{j120^\circ}$. Uzyskany układ sześciu równań (10.5)+(10.6) dla składowych symetrycznych ma następujące rozwiązanie:

$$\underline{U}_0 = -26,6 - j0,32 \text{ V}, \quad \underline{U}_1 = 46,62 - j32,83 \text{ V}, \quad \underline{U}_2 = -3,69 + j1,42 \text{ V},$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 = \underline{I}_2 = 0,13 - j10,64 \text{ A}.$$

Prąd zwarcia obliczamy z zależności:

$$\underline{I}_Z = \underline{I}_A = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

W celu wyznaczenia prądu fazy a źródła obliczamy składową symetryczną zgodną i przeciwną tego prądu posługując się schematami zastępczymi:

$$\underline{I}_{g1} = \frac{\underline{U}_{za} - \underline{U}_1}{\underline{Z}_{g1}} = 3,65 - j21,49 \text{ A}, \quad \underline{I}_{g2} = -\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{g2}} = -0,71 - j1,84 \text{ A}.$$

Prąd źródła w fazie A jest równy:

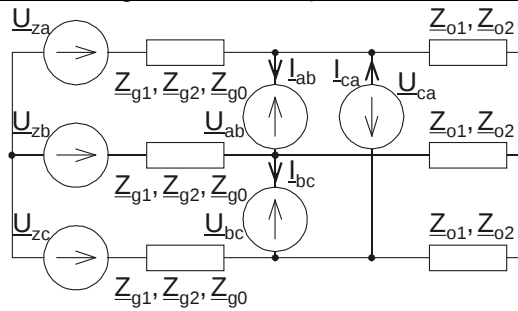
$$\underline{I}_{gA} = \underline{I}_{g1} + \underline{I}_{g2} + \underline{I}_0$$

Odpowiedź: $\underline{I}_Z = 31,92 e^{-j89,31^\circ} \text{ A}$, $\underline{I}_{gA} = 34,1 e^{-j84,85^\circ} \text{ A}$

Zadanie 10.31

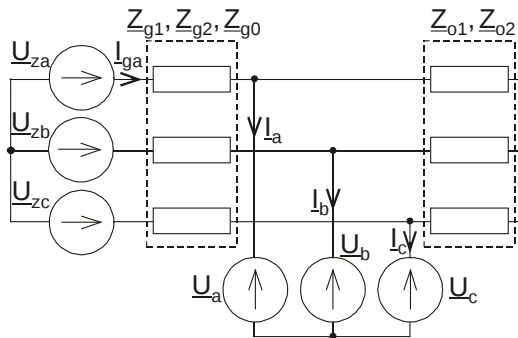
Rozwiązanie:

W miejscu powstania zwarcia, zamiast impedancji $\underline{Z}_z$, włączamy zastępcze źródło trójfazowe niesymetryczne połączone w trójkąt – rys. 10.25.I.



Rys. 10.25.I

Napięcia fazowe $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$, $\underline{U}_{CA}$ i prądy $\underline{I}_{AB}$, $\underline{I}_{BC}$, $\underline{I}_{CA}$ tego źródła rozkładamy na składowe symetryczne $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{I}_0$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ (w układzie trójkąta nie występuje składowa zerowa napięcia). Przy budowaniu schematów zastępczych dla składowej zgodnej i przeciwnej źródło połączone w trójkąt zamieniamy na gwiazdę – rys. 10.25.II.



Rys. 10.25.II

Ze względu na to, że kolejność faz dla składowej symetrycznej przeciwnej jest odwrotna w stosunku do składowej zgodnej, składowa symetryczna zgodna napięcia w zastępczej gwieździe jest równa:

$$\underline{U}_{1f} = \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ},$$

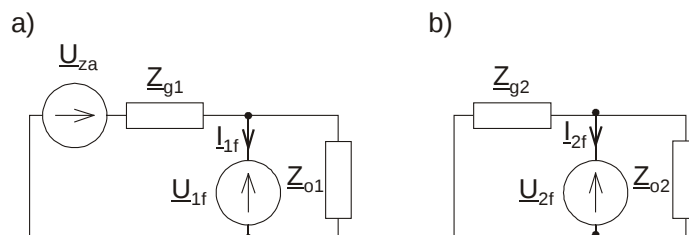
a składowa symetryczna przeciwna jest równa:

$$\underline{U}_{2f} = \frac{\underline{U}_2}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ}.$$

Podobne zależności obowiązują dla prądów, z tym, że prądy gwiazdy są $\sqrt{3}$ razy większe od prądów w trójkącie. Zatem dla składowych symetrycznych prądu w zastępczej gwieździe możemy zapisać:

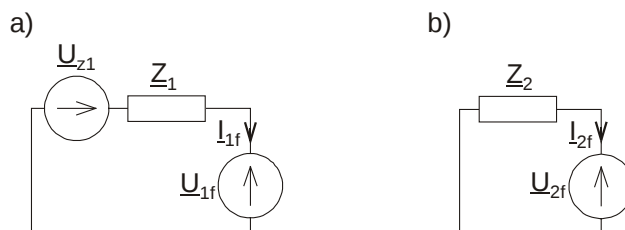
$$\underline{I}_{1f} = \underline{I}_1 \sqrt{3} e^{-j30^\circ}, \quad \underline{I}_{2f} = \underline{I}_2 \sqrt{3} e^{j30^\circ}$$

Schematy zastępcze dla składowych symetrycznych mają postać przedstawioną na rys. 10.25.III.



Rys. 10.25.III

W obwodzie, w którym są wyłącznie połączenia gwiazdowe bez przewodu zerowego nie wystąpi składowa symetryczna zerowa prądu. Oba obwody upraszczamy wykorzystując metodę Thevenina – rys. 10.25.IV.



Rys. 10.25.IV

$$\underline{U}_{z1} = U_{zA} \frac{\underline{Z}_{o1}}{\underline{Z}_{o1} + \underline{Z}_{g1}} = 78 - j54 \text{ V}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{o1} \cdot \underline{Z}_{g1}}{\underline{Z}_{o1} + \underline{Z}_{g1}} = 2,03 + j2,93 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{o2} \cdot \underline{Z}_{g2}}{\underline{Z}_{o2} + \underline{Z}_{g2}} = 0,14 + j0,35 \Omega$$

Ze schematów zastępczych (rys. 10.25.IV) wynikają dwa równania:

$$\underline{I}_{1f} \underline{Z}_1 + \underline{U}_{1f} = \underline{U}_{z1}$$

$$\underline{I}_{2f} \underline{Z}_2 + \underline{U}_{2f} = 0$$

Po wyrażeniu składowych symetrycznych w połączeniu gwiazdowym $\underline{I}_{1f}$, $\underline{U}_{1f}$, $\underline{I}_{2f}$, $\underline{U}_{2f}$ poprzez składowe symetryczne w trójkącie uzyskamy:

$$(10.7) \quad \begin{aligned} \underline{I}_1 \sqrt{3} e^{-j30^\circ} \underline{Z}_1 + \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} &= \underline{U}_{z1} \\ \underline{I}_2 \sqrt{3} e^{j30^\circ} \underline{Z}_2 + \frac{\underline{U}_2}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} &= 0 \end{aligned}$$

Dla obwodu trójfazowego w miejscu zwarcia można zapisać następujące równości:

$$\underline{U}_{BC} = \underline{I}_{BC} \underline{Z}_z, \quad \underline{I}_{AB} = 0, \quad \underline{I}_{CA} = 0,$$

które po wyrażeniu prądów i napięcia przez ich składowe symetryczne przybierają postać:

$$(10.8) \quad \begin{aligned} a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 &= (\underline{I}_0 + a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2) \underline{Z}_z \\ \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 &= 0 \\ \underline{I}_0 + a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $a = e^{j120^\circ}$. Uzyskany układ pięciu równań (10.7)+(10.8) dla składowych symetrycznych ma następujące rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= 44,98 - j14,71 \text{ V}, \quad \underline{U}_2 = 8,54 - j9 \text{ V}, \\ \underline{I}_0 &= -11,08 - j1,03 \text{ A}, \quad \underline{I}_1 = 6,43 - j9,08 \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = 4,65 + j10,11 \text{ A}. \end{aligned}$$

Prąd zwarcia obliczamy z zależności:

$$\underline{I}_z = \underline{I}_{BC} = \underline{I}_0 + a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2$$

Odpowiedź: $\underline{I}_z = 33,4 e^{-j174,7^\circ} \text{ A}$

III. PRZEBIEGI OKRESOWO ZMIENNE

11. WARTOŚCI ŚREDNIE I SKUTECZNE PRZEBIEGÓW OKRESOWYCH

Zadanie 11.1

Rozwiązanie:

Wartość średnia napięcia jest określona wzorem:

$$(11.1) \quad U_{\text{sr}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Całka w tym wzorze określa pole powierzchni figury ograniczonej funkcją $u(t)$, osią czasu oraz prostymi równoległymi do osi rzędnych, poprowadzonymi w punktach o odciętych równych granicom całki - rys. 11.1.I. W warunkach zadania górną granicę całki można ustalić na wartości t_p , ze względu na to, że powyżej tej wartości wartość napięcia jest równa zero. Pole określone całką można obliczyć jako pole zakreskowanego prostokąta, stąd wartość średnia napięcia jest równa:

$$U_{\text{sr}} = \frac{1}{T} (U_m \cdot t_p) = U_m \frac{t_p}{T}$$

Wartość skuteczna napięcia jest określona następująco:

$$(11.2) \quad U_{\text{sk}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Funkcja podcałkowa ma wartość stałą U_m^2 w przedziale $\langle 0, t_p \rangle$ - rys. 11.1.II. Zatem przy obliczaniu wartości skutecznej całkę można wyznaczyć tą samą metodą, jak dla wartości średniej.

$$U_{\text{sk}} = \sqrt{\frac{1}{T} (U_m^2 \cdot t_p)} = U_m \sqrt{\frac{t_p}{T}}$$

Odpowiedź: $U_{\text{sr}}(\delta) = U_m \delta$, $U_{\text{sk}}(\delta) = U_m \sqrt{\delta}$, $\delta \in \langle 0, 1 \rangle$

Zadanie 11.2

Rozwiązanie:

a) Wartość średnia prądu jest określona wzorem:

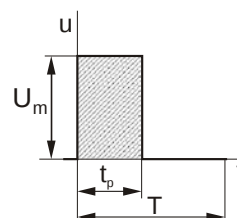
$$(11.3) \quad I_{\text{sr}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

Całkę we tym wzorze (11.1) można obliczyć jako pole powierzchni trzech zakreskowanych na rys. 11.2.I figur. Suma pól S_1 i S_3 dwóch trójkątów znajdujących się pod osią czasu jest równa polu S_2 trójkąta znajdującego się powyżej osi czasu. Ze względu na to, że pola figur znajdujących się poniżej osi odciętych, obliczane za pomocą całki, są ujemne, całkowita suma rozważanych pól jest równa zero:

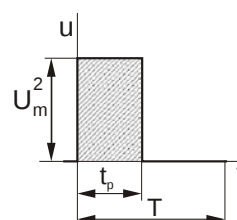
$$S_1 + S_2 + S_3 = 0$$

Taka sama jest wartość średnia przebiegu.

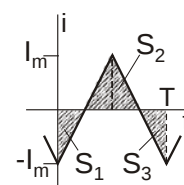
Aby obliczyć wartość skuteczną, wykorzystując wzór:



Rys. 11.1.I



Rys. 11.1.II



Rys. 11.2.I

$$(11.4) \quad I_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

trzeba najpierw określić postać analityczną funkcji $i(t)$ w przedziale całkowania. Jest to funkcja, na której przebieg składają się dwa odcinki funkcji liniowych, a zatem:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{4I_m}{T}t - I_m & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{4I_m}{T}t + 3I_m & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

Po podniesieniu tej funkcji do kwadratu uzyskuje się:

$$i^2(t) = \begin{cases} \frac{16I_m^2}{T^2}t^2 - \frac{8I_m^2}{T}t + I_m^2 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{16I_m^2}{T^2}t^2 - \frac{24I_m^2}{T}t + 9I_m^2 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

Wartość skuteczną trzeba obliczyć dokonując całkowania w dwóch przedziałach:

$$(11.5) \quad I_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} i^2(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T i^2(t) dt \right)}$$

Poszczególne całki wynoszą:

$$\int_0^{\frac{T}{2}} i^2(t) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{16I_m^2}{T^2}t^2 - \frac{8I_m^2}{T}t + I_m^2 \right) dt = \left(\frac{16I_m^2}{3T^2}t^3 - \frac{4I_m^2}{T}t^2 + I_m^2t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{I_m^2T}{6} = J_1$$

$$\int_{\frac{T}{2}}^T i^2(t) dt = \int_{\frac{T}{2}}^T \left(\frac{16I_m^2}{T^2}t^2 - \frac{24I_m^2}{T}t + 9I_m^2 \right) dt = \left(\frac{16I_m^2}{3T^2}t^3 - \frac{12I_m^2}{T}t^2 + 9I_m^2t \right) \Big|_{\frac{T}{2}}^T = \frac{I_m^2T}{6} = J_2$$

Ostatecznie:

$$I_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} (J_1 + J_2)} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{I_m^2T}{3}} = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$$

b) Wartość średnia prądu jest obliczana podobnie, jak w punkcie a) ze wzoru (11.3), poprzez wyznaczenie pól odpowiednich figur geometrycznych – rys. 11.2.II. Pola zakreskowanych trójkątów są sobie równe:

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} I_m \frac{T}{2}$$

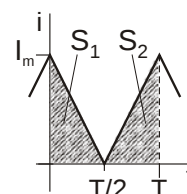
Wartość średnia jest równa:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} (S_1 + S_2) = \frac{1}{T} \frac{I_m T}{2} = \frac{I_m}{2}$$

Do obliczenia wartości skutecznej ze wzoru (11.4) wyznacza się najpierw postać analityczną funkcji $i(t)$ w przedziale całkowania:

$$i(t) = \begin{cases} -\frac{2I_m}{T}t + I_m & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{2I_m}{T}t - I_m & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

Po podniesieniu tej funkcji do kwadratu uzyskuje się:



Rys. 11.2.II

$$i^2(t) = \begin{cases} \frac{4I_m^2}{T^2} t^2 - \frac{4I_m^2}{T} t + I_m^2 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{4I_m^2}{T^2} t^2 - \frac{4I_m^2}{T} t + I_m^2 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

Z powyższego wzoru wynika, że w obu przedziałach (jak we wzorze (11.5)) jest całkowana ta sama funkcja. W takim przypadku wartość skuteczną prądu można obliczyć, całkując w jednym przedziale, równym okresowi funkcji $i(t)$:

$$\begin{aligned} I_{sk} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{4I_m^2}{T^2} t^2 - \frac{4I_m^2}{T} t + I_m^2 \right) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{4I_m^2}{3T^2} t^3 - \frac{2I_m^2}{T} t^2 + I_m^2 t \right) \Big|_0^T} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{I_m^2 T}{3} \right)} = \frac{I_m}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Odpowiedź: a) $I_{sr} = 0$, $I_{sk} = 0,58 I_m$, b) $I_{sr} = 0,5 I_m$, $I_{sk} = 0,58 I_m$.

Zadanie 11.3

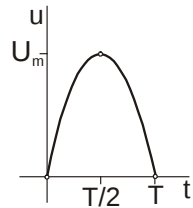
Odpowiedź: $U_{sr} = 0,5 U_m$, $U_{sk} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} = 0,58 U_m$.

Zadanie 11.4

Rozwiązanie:

a) Poszukiwana jest funkcja sinusoidalna aproksymująca jeden segment przebiegu napięcia – rys. 11.4.I. Biorąc pod uwagę duże podobieństwo między aproksymowanym przebiegiem a półokresem funkcji sinus, można przyjąć, że w przedziale $(0, T)$ napięcie zmienia się zgodnie z funkcją sinusoidalną o amplitudzie U_m i okresie $2T$. Stąd przebieg aproksymujący jest określony następująco:

$$(11.6) \quad u(t) = U_m \sin \frac{2\pi}{2T} t = U_m \sin \frac{\pi}{T} t$$



Rys. 11.4.I

Poszukiwana wartość średnia napięcia jest równa wartości średniej półokresowej napięcia sinusoidalnego, określonego wzorem (11.6):

$$U_{sr} = \frac{2U_m}{\pi}.$$

Poszukiwana wartość skuteczna napięcia jest równa wartości skutecznej napięcia sinusoidalnego, określonego wzorem (11.6):

$$U_{sk} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

b) Jeden segment przebiegu napięcia – rys. 11.4.I – jest aproksymowany funkcją kwadratową:

$$(11.7) \quad u(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

gdzie: α , β , γ – odpowiednio dobrane współczynniki stałe. Można je określić stosując numeryczną metodę interpolacji wielomianowej wg wzoru Lagrange'a:

$$(11.8) \quad u(t) = \sum_{j=0}^N U_j \frac{\prod_{k=0, k \neq j}^N (t - t_k)}{\prod_{k=0, k \neq j}^N (t_j - t_k)}$$

gdzie: t_j – węzły interpolacji, U_j – wartości funkcji w węzłach interpolacji. Wielkości te są określone w tabeli 1.

Tabela 1. Dane do wzoru (11.8)

j	0	1	2
t_j	0	$T/2$	T
U_j	0	U_m	0

W warunkach zadania wzór (11.8) rozwija się następująco:

(11.9)

$$u(t) = \sum_{j=0}^2 U_j \frac{\prod_{k=0, k \neq j}^2 (t - t_k)}{\prod_{k=0, k \neq j}^2 (t_j - t_k)} = U_0 \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)} + U_1 \frac{(t - t_0)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)} + U_2 \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)}$$

Po podstawieniu wartości z powyższej tabeli:

$$(11.10) \quad u(t) = U_m \frac{t(t - T)}{\frac{T}{2} \left(\frac{T}{2} - T \right)} = -\frac{4U_m}{T^2} t^2 + \frac{4U_m}{T} t$$

Porównanie wzorów (11.7) i (11.10) pozwala określić współczynniki α , β i γ :

$$\alpha = -\frac{4U_m}{T^2}, \quad \beta = \frac{4U_m}{T}, \quad \gamma = 0$$

Wartość średnia jest obliczana ze wzoru (11.1):

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha t^2 + \beta t dt = \frac{1}{T} \left(\frac{\alpha}{3} t^3 + \frac{\beta}{2} t^2 \right)_0^T = \frac{1}{T} \left(-\frac{4U_m}{3T^2} T^3 + \frac{4U_m}{2T} T^2 \right)_0^T = \frac{2}{3} U_m,$$

a wartość skuteczna ze wzoru (11.2):

$$U_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\alpha t^2 + \beta t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\alpha^2 t^4 + 2\alpha\beta t^3 + \beta^2 t^2) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{\alpha^2}{5} t^5 + \frac{2\alpha\beta}{4} t^4 + \frac{\beta^2}{3} t^3 \right)_0^T} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{16U_m^2}{5T^4} T^5 - \frac{16U_m^2}{2T^3} T^4 + \frac{16U_m^2}{3T^2} T^3 \right)} = \sqrt{\frac{16}{30} U_m^2} = \frac{4}{\sqrt{30}} U_m$$

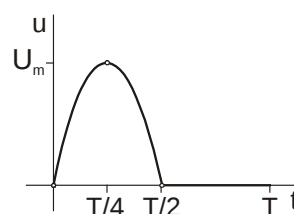
Odpowiedź: a) $U_{sr} = 63,7$ V, $U_{sk} = 70,7$ V, b) $U_{sr} = 66,7$ V, $U_{sk} = 73$ V.

Zadanie 11.5

Rozwiązanie:

a) Funkcja sinusoidalna aproksymująca pierwszy półokres zmienności napięcia – rys. 11.5.I – jest określona wzorem (11.6), z zastrzeżeniem, że w miejsce $2T$ podstawia się T . Zatem rozważane napięcie zmienia się w ciągu jednego okresu wg zależności:

$$u(t) = \begin{cases} U_m \sin \frac{2\pi}{T} t & 0 \leq t < 0,5T \\ 0 & 0,5T \leq t < T \end{cases}$$



Rys. 11.5.I

Wartość średnia jest obliczana ze wzoru (11.1) przy uwzględnieniu, że całkowanie odbywa się tylko do połowy okresu, gdyż powyżej tej granicy funkcja podcałkowa jest równa zero.

$$U_{\text{sr}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{T} U_m \frac{T}{2\pi} \left(-\cos \frac{2\pi}{T} t \right)_0^{\frac{T}{2}} = \frac{U_m}{2\pi} \left(-\cos \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} + \cos 0 \right) = \frac{U_m}{\pi}$$

W tych samych granicach należy przeprowadzić całkowanie przy obliczaniu wartości skutecznej ze wzoru (11.2).

$$U_{\text{sk}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t dt}$$

Obliczając całkę można skorzystać z tożsamości trygonometrycznej:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$U_{\text{sk}} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2T} \int_0^{\frac{T}{2}} 1 - \cos 2 \frac{2\pi}{T} t dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2T} \left(t - \frac{T}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{T} t \right)_0^{\frac{T}{2}}} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2T} \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{4\pi} \sin 2\pi \right)} = \frac{U_m}{2}$$

b) Pierwszy półokres przebiegu napięcia jest aproksymowany funkcją (11.7) w oparciu o wzór (11.8), do którego dane zebrano w tabeli 2.

Tabela 2. Dane do wzoru (11.8)

j	0	1	2
t _j	0	T/4	T/2
U _j	0	U _m	0

Podstawienie danych z tej tabeli do rozwinięcia wzoru interpolacyjnego (11.9) daje następujący wynik:

$$(11.11) \quad u(t) = U_m \frac{t \left(t - \frac{T}{2} \right)}{\frac{T}{4} \left(\frac{T}{4} - \frac{T}{2} \right)} = -\frac{16U_m}{T^2} t^2 + \frac{8U_m}{T} t$$

Porównując wzory (11.7) i (11.11) można określić współczynniki funkcji aproksymującej (11.7):

$$\alpha = -\frac{16U_m}{T^2} = -4 \frac{V}{(\text{ms})^2}, \quad \beta = \frac{8U_m}{T} = 40 \frac{V}{\text{ms}}, \quad \gamma = 0$$

Rozważane napięcie zmienia się w ciągu jednego okresu wg zależności:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha t^2 + \beta t & 0 \leq t < 0,5T \\ 0 & 0,5T \leq t < T \end{cases}$$

Podobnie jak w punkcie a), przy obliczaniu wartości średniej i skutecznej całkowanie odbywa się przez pierwszy półokres zmienności napięcia. W poniższych obliczeniach czas wyrażono w milisekundach.

$$U_{\text{sr}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \alpha t^2 + \beta t dt = \frac{1}{20} \int_0^{10} -4t^2 + 40t dt = \frac{1}{20} \left(-\frac{4}{3} t^3 + \frac{40}{2} t^2 \right)_0^{10} = \frac{100}{3} \text{ V}$$

$$U_{\text{sk}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (\alpha t^2 + \beta t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{20} \int_0^{10} (16t^4 - 320t^3 + 1600t^2) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{20} \left(\frac{16}{5} t^5 - \frac{320}{4} t^4 + \frac{1600}{3} t^3 \right)_0^{10}} = \sqrt{\frac{8000}{3}} \text{ V}$$

Odpowiedź: a) $U_{\text{sr}} = 31,8 \text{ V}$, $U_{\text{sk}} = 50 \text{ V}$, b) $U_{\text{sr}} = 33,3 \text{ V}$, $U_{\text{sk}} = 51,6 \text{ V}$.

Zadanie 11.6

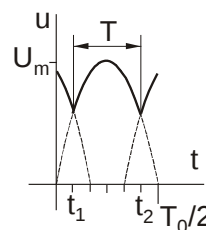
Rozwiązanie:

Przebieg napięcia $u(t)$ jest funkcją okresową o okresie T – rys.

11.6.I. Z rysunku wynika, że okres napięcia jest równy:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{5}{12} T_0 - \frac{1}{12} T_0 = \frac{T_0}{3}$$

gdzie T_0 jest okresem napięć sinusoidalnych, z których wycinków jest utworzony przebieg $u(t)$. Przedstawiony na rys. 11.6.I segment napięcia $u(t)$ jest opisany funkcją:



Rys. 11.6.I

$$u(t) = U_m \sin \frac{2\pi}{T_0} t \quad t \in \left\langle \frac{T_0}{12}, \frac{5T_0}{12} \right\rangle$$

Wartość średnia jest obliczana ze wzoru:

$$U_{\text{sr}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt = \frac{3}{T_0} \int_{\frac{T_0}{12}}^{\frac{5T_0}{12}} U_m \sin \frac{2\pi}{T_0} t dt = \frac{3U_m}{2\pi} \left(-\cos \frac{2\pi}{T_0} t \right)_{\frac{T_0}{12}}^{\frac{5T_0}{12}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} U_m.$$

Wartość skuteczna jest obliczana następująco:

$$U_{\text{sk}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{3}{T_0} \int_{\frac{T_0}{12}}^{\frac{5T_0}{12}} U_m^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T_0} t dt}.$$

Wykorzystując odpowiednią tożsamość trygonometryczną, jak to uczyniono w punkcie a) rozwiązania zad. 12.5, otrzymuje się:

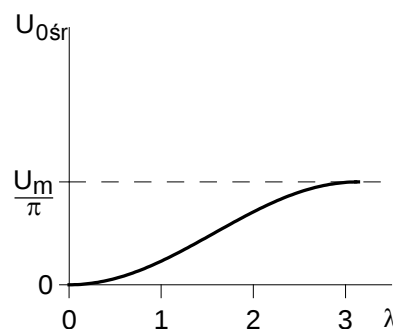
$$\begin{aligned} U_{\text{sk}} &= \sqrt{\frac{3U_m^2}{2T_0} \int_{\frac{T_0}{12}}^{\frac{5T_0}{12}} 1 - \cos \frac{4\pi}{T_0} t dt} = \sqrt{\frac{3U_m^2}{2T_0} \left(t - \frac{T_0}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{T_0} t \right)_{\frac{T_0}{12}}^{\frac{5T_0}{12}}} \\ &= \sqrt{\frac{3U_m^2}{2T_0} \left[\frac{T_0}{3} - \frac{T_0}{4\pi} \left(\sin \frac{5\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}} U_m \end{aligned}$$

Odpowiedź: $U_{\text{sr}} = 82,7 \text{ V}$, $U_{\text{sk}} = 84,1 \text{ V}$

Zadanie 11.7

Odpowiedź: $U_{0\text{sr}}(\lambda) = \frac{U_m}{2\pi} [1 - \cos(\lambda)]$. Wykres przedstawia rys.

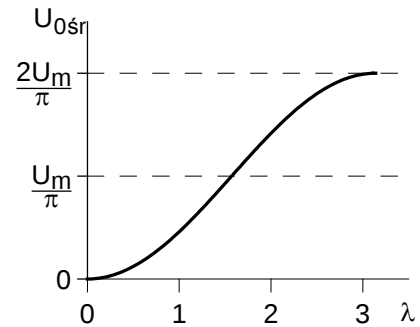
11.7.I



Rys. 11.7.I

Zadanie 11.8

Odpowiedź: $U_{0sr}(\lambda) = \frac{U_m}{\pi} [1 - \cos(\lambda)]$. Wykres przedstawia rys. 11.8.I



Rys. 11.8.I

Zadanie 11.9

Rozwiązanie:

Przebiegi napięcia i prądu są opisane następującymi funkcjami:

$$u(t) = \begin{cases} U_2 & 0 \leq t < t_1 \\ U_1 & t_1 \leq t < t_2 \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} \alpha_1 t + \beta_1 & 0 \leq t < t_1 \\ \alpha_2 t + \beta_2 & t_1 \leq t < t_2 \end{cases}$$

gdzie: $\alpha_1 = \frac{I_2 - I_1}{t_1} = 2 \frac{A}{ms}$, $\beta_1 = I_1 = 9 A$, $\alpha_2 = -\frac{I_2 - I_1}{t_2 - t_1} = -\frac{2}{3} \frac{A}{ms}$, $\beta_2 = \frac{I_2 t_2 - I_1 t_1}{t_2 - t_1} = 11 \frac{2}{3} A$.

Przebieg mocy chwilowej przedstawia funkcja:

$$p(t) = u(t)i(t) = \begin{cases} U_2(\alpha_1 t + \beta_1) & 0 \leq t < t_1 \\ U_1(\alpha_2 t + \beta_2) & t_1 \leq t < t_2 \end{cases}$$

Wartość skuteczna napięcia:

$$U_{sk} = \sqrt{\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{t_2} \left(\int_0^{t_1} U_2^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} U_1^2 dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{t_2} [U_2^2 t_1 + U_1^2 (t_2 - t_1)]}$$

Wartość skuteczna prądu:

$$I_{sk} = \sqrt{\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{t_2} \left[\int_0^{t_1} (\alpha_1 t + \beta_1)^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} (\alpha_2 t + \beta_2)^2 dt \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{t_2} \left(\frac{\alpha_1^2 t_1^3}{3} + \alpha_1 \beta_1 t_1^2 + \beta_1^2 t_1 + \frac{\alpha_2^2 t_2^3}{3} + \alpha_2 \beta_2 t_2^2 + \beta_2^2 t_2 - \frac{\alpha_2^2 t_1^3}{3} - \alpha_2 \beta_2 t_1^2 - \beta_2^2 t_1 \right)}$$

Moc czynna:

$$P = \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{t_2} \left[\int_0^{t_1} U_2 (\alpha_1 t + \beta_1) dt + \int_{t_1}^{t_2} U_1 (\alpha_2 t + \beta_2) dt \right]$$

$$= \frac{1}{t_2} \left[\frac{U_2 \alpha_1 t_1^2}{2} + U_2 \beta_1 t_1 + \frac{U_1 \alpha_2 (t_2^2 - t_1^2)}{2} + U_1 \beta_2 (t_2 - t_1) \right]$$

Odpowiedź: $U_{sk} = 55,5 V$, $I_{sk} = 10 A$, $P = 342,5 W$.

Zadanie 11.10

Odpowiedź: $U_{sk} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} = 57,7 V$, $I_{sk} = \sqrt{\frac{3I_2^2 + 4I_2I_1 + 8I_1^2}{15}} = 2 A$, $P = \frac{U_m(I_2 + 2I_1)}{6} = 100 W$

12. ANALIZA HARMONICZNA

Zadanie 12.1

Rozwiązanie:

Współczynniki rozwinięcia przebiegu napięcia zasilającego w szereg Fouriera zostaną obliczone ze wzorów ogólnych dla szeregu trygonometrycznego. Postać analityczna funkcji napięcia w przedziale równym okresowi funkcji $T = t_1 + t_2 = 4,4 \text{ ms}$ jest następująca:

$$u(t) = \begin{cases} U_1 & t \in \langle 0, t_1 \rangle \\ U_2 & t \in \langle t_1, t_1 + t_2 \rangle \end{cases}$$

Jako jednostkę czasu przyjęto milisekundę.

Składowa stała:

$$(12.1) \quad A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{t_1} U_1 dt + \int_{t_1}^{t_1+t_2} U_2 dt \right] = \frac{1}{T} [U_1 t_1 + U_2 (t_1 + t_2 - t_1)] = \frac{U_1 t_1 + U_2 t_2}{T}$$

Współczynniki Fouriera wyrazów kosinusoidalnych:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \cos k\omega t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{t_1} U_1 \cos k\omega t dt + \int_{t_1}^T U_2 \cos k\omega t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{U_1}{k\omega} \sin k\omega t \Big|_0^{t_1} + \frac{U_2}{k\omega} \sin k\omega t \Big|_{t_1}^T \right] = \frac{2}{Tk \frac{2\pi}{T}} [U_1 (\sin k\omega t_1 - \sin 0) + U_2 (\sin k\omega T - \sin k\omega t_1)] \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu, że $\sin 0 = 0$ oraz $\sin k\omega T = \sin k \frac{2\pi}{T} T = \sin k2\pi = 0$, otrzymuje się:

$$(12.2) \quad A_k = \frac{1}{k\pi} (U_1 - U_2) \sin k\omega t_1$$

Współczynniki Fouriera wyrazów sinusoidalnych:

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \sin k\omega t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{t_1} U_1 \sin k\omega t dt + \int_{t_1}^T U_2 \sin k\omega t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[-\frac{U_1}{k\omega} \cos k\omega t \Big|_0^{t_1} - \frac{U_2}{k\omega} \cos k\omega t \Big|_{t_1}^T \right] = \frac{2}{Tk \frac{2\pi}{T}} [U_1 (-\cos k\omega t_1 + \cos 0) + U_2 (-\cos k\omega T + \cos k\omega t_1)] \end{aligned}$$

Uwzględniając, że $\cos 0 = 1$ oraz $\cos k\omega T = \cos k \frac{2\pi}{T} T = \cos k2\pi = 1$, uzyskuje się:

$$(12.3) \quad B_k = \frac{1}{k\pi} (U_1 - U_2) (1 - \cos k\omega t_1)$$

Pulsacja podstawowej harmoniczej wynosi: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1428 \text{ s}^{-1}$.

Rozwinięcie w szereg zawiera zarówno składniki sinusoidalne, jak i kosinusoidalne. Napięcie zasilające można przedstawić w postaci szeregu o składnikach jedynie sinusoidalnych, posługując się wzorami:

$$(12.4) \quad U_{km} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \varphi_k = \begin{cases} \arctg \frac{A_k}{B_k} & B_k > 0 \\ \arctg \frac{A_k}{B_k} \pm 180^\circ & B_k < 0 \end{cases}$$

gdzie: U_{km} – amplituda harmonicznej rzędu k , φ_k – faza harmonicznej rzędu k . Wartości poszczególnych współczynników, obliczone ze wzorów (12.1), (12.2), (12.3) i (12.4) przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Współczynniki rozwinięcia napięcia w szereg Fouriera

rzęd harmonicznej	0	1	2	3	4	5	6
A_k [V]	1,5	9,55	0	-3,18	0	1,91	0
B_k [V]		9,55	9,55	3,18	0	1,91	3,18
U_{km} [V]	1,5	13,51	9,55	4,5	0	2,7	3,18
φ_k [°]		45	0	-45		45	0

Rozwinięcie napięcia $u(t)$ w szereg Fouriera w postaci sumy częściowej można zapisać następująco:

$$u(t) \approx U_0 + \sum_{k=1}^6 U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

$$= 1,5 + 13,51 \sin(\omega t + 45^\circ) + 9,55 \sin 2\omega t + 4,5 \sin(3\omega t - 45^\circ) + 2,7 \sin(5\omega t + 45^\circ) + 3,18 \sin 6\omega t \text{ [V]}$$

Składowa stała napięcia zasilającego $U_0 = a_0 = 1,5$ V nie powoduje przepływu prądu w obwodzie ze względu na występowanie w nim pojemności, przez którą w stanie ustalonym nie przepływa prąd stały.

Wartość zespolona harmonicznej rzędu k napięcia zasilającego jest równa:

$$\underline{U}_k = \frac{U_{km}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_k}.$$

Wymusza ona w obwodzie przepływ prądu o wartości zespolonej:

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_k} = I_k e^{j\psi_k},$$

gdzie $\underline{Z}_k = R + jk\omega L - j\frac{1}{k\omega C}$ jest impedancją obwodu dla harmonicznej rzędu k .

W tabeli 4 zamieszczono wyniki obliczeń harmoniczných prądu dla $1 \leq k \leq 6$.

Tabela 4. Wyniki obliczeń harmoniczných prądu

rzęd harmonicznej	$\underline{U}_k$ [V]	$\underline{Z}_k$ [Ω]	$\underline{I}_k$ [A]
1	$9,55e^{j45^\circ}$	$5-j12,65$	$0,7e^{j113,44^\circ}$
2	$6,75e^{j0}$	$5+j0,96$	$1,33e^{-j10,83^\circ}$
3	$3,18e^{-j45^\circ}$	$5+j8,73$	$0,32e^{-j105,2^\circ}$
4	0	$5+j15,04$	0
5	$1,91e^{j45^\circ}$	$5+j20,77$	$0,09e^{-j31,47^\circ}$
6	$2,25e^{j0}$	$5+j26,21$	$0,08e^{-j79,2^\circ}$

Prąd w obwodzie można przedstawić jako sumę skończoną szeregu Fouriera:

$$i(t) \approx \sum_{k=1}^6 I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \psi_k) = 0,99 \sin(\omega t + 113,24^\circ) +$$

$$1,88 \sin(2\omega t - 10,83^\circ) - 0,45 \sin(3\omega t - 105,2^\circ) + 0,13 \sin(5\omega t - 31,47^\circ) - 0,12 \sin(6\omega t - 79,2^\circ) \text{ A}$$

Wartość skuteczna prądu w obwodzie: $I_{sk} \approx \sqrt{\sum_{k=1}^6 I_k^2}$.

Wartość skuteczna napięcia zasilającego: $U_{sk} \approx \sqrt{\sum_{k=0}^6 U_k^2} = 12,57 \text{ V}$

$$\text{Moc czynna: } P \approx \sum_{k=1}^6 U_k I_k \cos(\varphi_k - \psi_k)$$

$$\text{Moc bierna: } Q \approx \sum_{k=1}^6 U_k I_k \sin(\varphi_k - \psi_k)$$

$$\text{Moc pozorna: } S = U_{sk} I_{sk}$$

$$\text{Moc odkształcenia: } D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

$$\text{Odpowiedź: } I_{sk} = 1,54 \text{ A}, \quad P = 11,8 \text{ W}, Q = -3,3 \text{ var}, S = 19,3 \text{ V} \cdot \text{A}, D = 14,9 \text{ V} \cdot \text{A}.$$

Zadanie 12.2

Wskazówka:

Przebieg prądu jest funkcją nieparzystą i antysymetryczną, zatem w szeregu Fouriera wystąpią jedynie składniki sinusoidalne rzędów nieparzystych. Można je obliczyć ze wzoru o skróconym przedziale całkowania:

$$B_k = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} i(t) \cdot \sin k\omega t \, dt, \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

$$\text{gdzie: } T = 4t_1 + 2t_2, \quad i(t) = \begin{cases} \frac{I_m}{t_1} t & t < t_1 \\ I_m & t_1 \leq t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

Po podstawieniu funkcji prądu do wzoru całkowego:

$$B_k = \frac{8}{T} \left(\int_0^{t_1} \frac{I_m}{t_1} t \sin k\omega t \, dt + \int_{t_1}^{t_1 + \frac{t_2}{2}} I_m \sin k\omega t \, dt \right)$$

Pierwszą całkę można obliczyć całkując przez części:

$$\int t \sin k\omega t \, dt = -\frac{1}{k\omega} t \cos k\omega t + \frac{1}{k^2 \omega^2} \sin k\omega t$$

$$\text{Odpowiedź: } U_{sk} = 18,3 \text{ V}, P = 2,78 \text{ W}, Q = -1,55 \text{ var}$$

Zadanie 12.3

Wskazówka:

Przebieg napięcia jest funkcją nieparzystą, więc w szeregu Fouriera wystąpią jedynie składniki sinusoidalne. Można je obliczyć ze wzoru o skróconym przedziale całkowania:

$$B_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) \cdot \sin k\omega t \, dt$$

$$\text{gdzie: } i(t) = -\frac{2U_m}{T} t, \quad -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$$

$$\text{Odpowiedź: } I_{sk} = 59 \text{ mA}, P = 88 \text{ mW}, Q = 126 \text{ mvar}.$$

Zadanie 12.4

Rozwiązanie:

Napięcie zasilające $u(t)$ jest funkcją parzystą, a więc w rozwinięciu w szereg Fouriera wystąpią wyłącznie składowe kosinusoidalne i składowa stała. W przedziale $(0, T)$ funkcja $u(t)$ jest opisana zależnością:

$$u(t) = U_m \sin \omega_0 t, \text{ gdzie } \omega_0 = \frac{\pi}{T}.$$

Składowa stała:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin \omega_0 t dt = -\frac{U_m}{T} \frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \Big|_0^T = \frac{2U_m}{\pi} = 197,4 \text{ V}$$

Ze względu na parzystość funkcji, współczynniki Fouriera wyrazów kosinusoidalnych można obliczyć, całkując w skróconym przedziale czasu:

$$A_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) \cos k\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m \sin \omega_0 t \cdot \cos k\omega t dt$$

Powyższą całkę można obliczyć korzystając z tożsamości:

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

oraz uwzględniając, że $\omega = 2\omega_0$.

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m \frac{\sin(\omega_0 t + k\omega t) + \sin(\omega_0 t - k\omega t)}{2} dt = \\ &= \frac{2U_m}{T} \left\{ -\frac{\cos[(1+2k)\omega_0 t]}{(1+2k)\omega_0} - \frac{\cos[(1-2k)\omega_0 t]}{(1-2k)\omega_0} \right\} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{2U_m}{\pi} \left[-\frac{\cos(1+2k)\frac{\pi}{2}}{1+2k} - \frac{\cos(1-2k)\frac{\pi}{2}}{1-2k} + \frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1-2k} \right] = \frac{4U_m}{\pi(1-4k^2)}, \quad k=1,2,3... \end{aligned}$$

Składniki sinusoidalne w szeregu Fouriera nie występują: $B_k=0$, $k=1,2,3...$

W obwodzie popłynie składowa stała prądu o wartości:

$$I_0 = \frac{A_0 - U_0}{R} = \frac{197,4 - 150}{5} = 9,48 \text{ A}$$

Wartość zespolona harmonicznej rzędu k napięcia zasilającego jest równa (współczynniki a_k są ujemne!):

$$\underline{U}_k = \frac{A_k}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} = \frac{|A_k|}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} = U_k e^{j\varphi_k}.$$

Wymusza ona przepływ prądu o wartości zespolonej:

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_k} = I_k e^{j\psi_k},$$

gdzie $\underline{Z}_k = R + jk\omega L$ jest impedancją obwodu dla harmonicznej rzędu k .

W tabeli 5 zamieszczono wyniki obliczeń harmonicznych prądu dla $1 \leq k \leq 3$:

Prąd w obwodzie można przedstawić jako sumę skończoną szeregu Fouriera:

$$\begin{aligned} i(t) &\approx I_0 + \sum_{k=1}^3 I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \psi_k) \\ &= 9,48 + 9,73 \sin(\omega t - 158,3^\circ) + 1,03 \sin(2\omega t - 168,75^\circ) + 0,3 \sin(3\omega t - 172,45^\circ) \text{ A} \end{aligned}$$

Wartość skuteczna prądu w obwodzie: $I_{sk} \approx \sqrt{\sum_{k=0}^3 I_k^2}$.

Moc czynna oddawana przez źródło sinusoidalne jest tracona na rezystancji R i pobierana przez źródło U_0 :

$$P = I_{sk}^2 R + U_0 I_0$$

Moc bierna źródła sinusoidalnego jest sumą mocy biernych poszczególnych harmoniczych:

$$Q \approx \sum_{k=1}^3 U_k I_k \sin(\varphi_k - \psi_k)$$

Moc pozorna źródła sinusoidalnego: $S = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I_{sk}$

Tabela 5. Wyniki obliczeń harmoniczych prądu

k	$\underline{U}_k$ [V]	$\underline{Z}_k$ [Ω]	$\underline{I}_k$ [A]
1	$93,03e^{-j90^\circ}$	$5+j12,57$	$6,88e^{-j158,3^\circ}$
2	$18,61e^{-j90^\circ}$	$5+j25,13$	$0,73e^{-j168,75^\circ}$
3	$7,97e^{-j90^\circ}$	$5+j37,7$	$0,21e^{-j172,45^\circ}$

Odpowiedź: $I_{sk} = 11,7$ A, $P = 2,11$ kW, $Q = 610$ var, $S = 2,57$ kV·A.

Zadanie 12.5

Rozwiązanie:

Jak wynika z rys. 12.5, segment przebiegu napięcia w przedziale $(0, T)$, gdzie T oznacza okres tego przebiegu, jest określony funkcją:

$$u(t) = U_m \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right), \text{ gdzie: } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, T_0 = 3T.$$

Obliczenie współczynników szeregu przebiega następująco:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{3}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{3}} U_m \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right) dt = -\frac{3U_m}{T_0} \frac{\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right)}{\omega_0} \Bigg|_0^{\frac{T_0}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} U_m = 128,2 \text{ V}$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega t dt = \frac{6}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{3}} U_m \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right) \cos k\omega t dt$$

$$= \frac{3U_m}{2\pi} \left[-\frac{\cos\left(\frac{2\pi(1+3k)}{T_0} t\right)}{1+3k} - \frac{\cos\left(\frac{2\pi(1-3k)}{T_0} t\right)}{1-3k} \right] \Bigg|_0^{\frac{T_0}{3}} = -\frac{3\sqrt{3}U_m}{\pi(9k^2-1)}, \quad k=1,2,\dots$$

Przy obliczaniu powyższej całki skorzystano z tożsamości:

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

Przy zasilaniu obwodu napięciem stałym pojemność C jest naładowana do wartości napięcia źródła. Dlatego dla składowej stałej rozwinięcia $u_1(t)$ w szereg składowa stała rozwinięcia w szereg napięcia $u_2(t)$ jest równa:

$$U_{20} = A_0$$

Wartość zespolona harmonicznej rzędu k napięcia zasilającego jest równa:

$$\underline{U}_{1k} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} = \frac{|A_k|}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} = U_{1k} e^{j\varphi_k}.$$

Wartość zespolona harmonicznej rzędu k napięcia $u_2(t)$ wynosi:

$$\underline{U}_{2k} = \underline{U}_{1k} \frac{\frac{1}{jk\omega C}}{R + jk\omega L + \frac{1}{jk\omega C}} = \frac{\underline{U}_{1k}}{1 - k^2\omega^2 LC + jk\omega RC} = U_{2k} e^{j\psi_{2k}}.$$

Wyniki obliczeń według powyższych wzorów przedstawiono w tabeli 4.

Wartość chwilowa napięcia na pojemności:

$$\begin{aligned} u_2(t) &\approx U_{20} + \sum_{k=1}^4 U_{2k} \sqrt{2} \sin(k\omega t + \psi_{2k}) \\ &= 128,2 + 3,58 \sin(\omega t + 118,3^\circ) + 0,21 \sin(2\omega t + 103,8^\circ) + \\ &\quad 0,04 \sin(3\omega t + 99,2^\circ) + 0,01 \sin(4\omega t + 96,9^\circ) [\text{V}] \end{aligned}$$

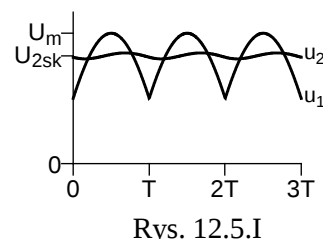
Przebieg napięcia u_2 określonego sumą szeregu oraz napięcia u_1 przedstawiono na rys. 12.5.I.

Wartość skuteczna napięcia u_2 :

$$U_{2sk} \approx \sqrt{\sum_{k=0}^4 U_{2k}^2}$$

Wartość skuteczna napięcia u_1 :

$$U_{1sk} \approx \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^4 \frac{A_k^2}{2}}$$



Rys. 12.5.I

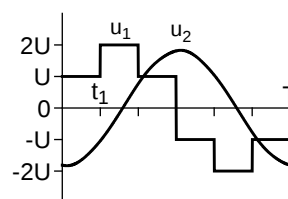
Odpowiedź: $U_{1sk} = 132,4 \text{ V}$, $U_{2sk} = 128,2 \text{ V}$.

Zadanie 12.6

Odpowiedź: $U_{1sk} = 6,95 \text{ V}$, $U_{2sk} = 6,42 \text{ V}$,

$$u_2(t) = 9,08 \sin(\omega t - 95,27^\circ) + 0,07 \sin(5\omega t - 168,79^\circ) + 0,03 \sin(7\omega t - 172,09^\circ) [\text{V}]$$

Wykresy napięć u_1 i u_2 przedstawia rys. 12.6.I.



Rys. 12.6.I

Zadanie 12.7

Odpowiedź: $I_{sk} = 67 \text{ mA}$, $U_{sk} = 16 \text{ V}$, $P = 405 \text{ mW}$, $Q = -100 \text{ mvar}$

Zadanie 12.8

Odpowiedź: $U_{sk} = 8,88 \text{ V}$, $P = 0,99 \text{ W}$, $Q = 1,76 \text{ var}$, $S = 4,1 \text{ V}\cdot\text{A}$

Zadanie 12.9

Odpowiedź: $I_{sk} = 125 \text{ mA}$, $U_{sk} = 6,3 \text{ V}$, $P = 705 \text{ mW}$, $Q = 676 \text{ mvar}$.

Zadanie 12.10

Odpowiedź: $U_{sk} = 34,5 \text{ V}$, $P = 140,7 \text{ W}$, $Q = -71,9 \text{ var}$, $S = 172,4 \text{ V}\cdot\text{A}$.

IV. UKŁADY AKTYWNE

13. OBWODY ZE WZMACNIACZAMI OPERACYJNYMI

Zadanie 13.1

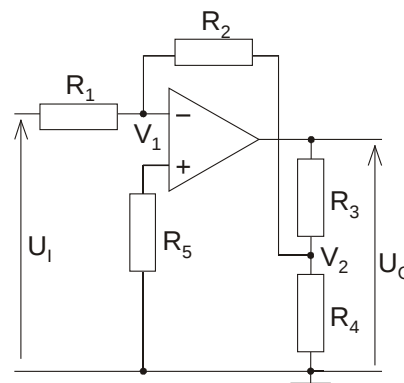
Rozwiązanie:

Zadanie zostanie rozwiązane metodą potencjałów węzłowych. W obwodzie występują dwa nieznanne potencjały V_1 i V_2 – rys. 13.1.I. Równanie dla węzła, o potencjale V_1 ma postać:

$$V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - V_2 \frac{1}{R_2} = \frac{U_1}{R_1}$$

Równanie dla węzła o potencjale V_2 :

$$V_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - V_1 \frac{1}{R_2} = \frac{U_0}{R_3}$$



Rys. 13.1.I

Ze względu na to, że wejście nieodwracające wzmacniacza jest zwarte poprzez rezystor R_5 do masy, a do wejść wzmacniacza nie wpływają prądy, oraz między wejściami wzmacniacza napięcie jest równe zero, potencjał V_1 jest także równy zero. Stąd powyższe równania upraszczają się do postaci:

$$-V_2 \frac{1}{R_2} = \frac{U_1}{R_1}$$

$$V_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{U_0}{R_3}$$

Dzieląc oba równania stronami uzyskuje się równość:

$$-R_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{U_0}{U_1} \frac{R_1}{R_3},$$

z której wyznacza się wzmocnienie układu $K = \frac{U_0}{U_1}$.

Odpowiedź: $K = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2} \right) = -3.$

Zadanie 13.2

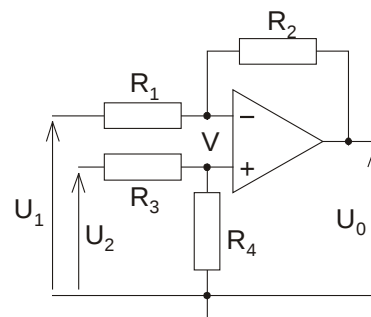
Rozwiązanie:

Oba wejścia wzmacniacza mają jednakowe potencjały, oznaczone przez V – rys. 13.2.I. Suma prądów dopływających do węzła przy wejściu odwracającym jest równa:

$$\frac{U_1 - V}{R_1} + \frac{U_0 - V}{R_2} = 0$$

Sumę prądów dopływających do węzła przy wejściu nieodwracającym opisuje równanie:

$$\frac{U_2 - V}{R_3} - \frac{V}{R_4} = 0.$$



Rys. 13.2.I

Po wyznaczeniu potencjału V z drugiego równania i podstawieniu do pierwszego uzyskuje się:

$$\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4} + \frac{U_0}{R_2} + \frac{U_2}{R_2} \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 0.$$

Otrzymane równania przekształca się tak, aby wyliczyć z niego napięcie wyjściowe:

$$U_0 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_2 - \frac{R_2}{R_1} U_1.$$

Aby postawiony w zadaniu warunek $U_0 = K(U_2 - U_1)$ był spełniony, muszą zajść następujące związki:

$$K = \frac{R_2}{R_1}$$

co oznacza że $R_2 = KR_1$, oraz

$$K = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

co po uwzględnieniu pierwszego związku prowadzi do zależności

$$\frac{K}{1 + K} = \frac{R_4}{R_3 + R_4},$$

z której wynika, że $R_4 = KR_3$.

Odpowiedź: $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 16 \text{ k}\Omega$.

Zadanie 13.3

Odpowiedź: $U_0 = 2,75$, $U_2 = -2,5U_1$.

Zadanie 13.4

Rozwiązanie:

Dla węzłów obwodu, do których są przyłączone wejścia wzmacniacza (rys. 13.3.I), wynikają następujące równania z I prawa Kirchhoffa:

$$-i_1 + i_{C1} = 0$$

$$i_2 - i_{C2} = 0$$

Uwzględniając, że potencjały wejść wzmacniacza są jednakowe i równe napięciu na kondensatorze C_2 , prądy w powyższych równaniach wyrażamy następująco:

$$i_1 = \frac{u_{C2}}{R_1}, \quad i_{C1} = C_1 \frac{d(u_0 - u_{C2})}{dt}, \quad i_2 = \frac{u_1 - u_{C2}}{R_2}, \quad i_{C2} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}.$$

Po podstawieniu tych zależności do równań otrzymujemy:

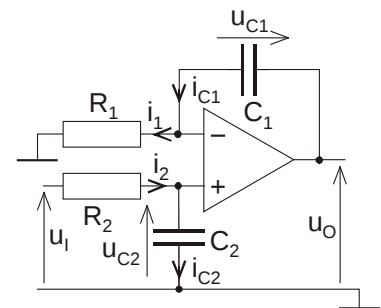
$$-\frac{u_{C2}}{R_1} + C_1 \frac{d(u_0 - u_{C2})}{dt} = 0$$

$$\frac{u_1 - u_{C2}}{R_2} - C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = 0$$

Po dokonaniu kilku przekształceń układ równań przyjmie postać:

$$R_1 C_1 \frac{du_{C2}}{dt} + u_{C2} = R_1 C_1 \frac{du_0}{dt}$$

$$-R_2 C_2 \frac{du_{C2}}{dt} - u_{C2} + u_1 = 0$$



Rys. 13.3.I

Równania dodajemy do siebie stronami z uwzględnieniem warunku zadania $R_1C_1=R_2C_2$ i uzyskujemy:

$$u_I = R_1C_1 \frac{du_O}{dt} = T \frac{du_O}{dt}$$

a po przekształceniu:

$$du_O = \frac{1}{T} u_I dt$$

Napięcie wyjściowe układu wyznaczamy całkując obustronnie otrzymane równanie:

$$\int_0^t du_O = \frac{1}{T} \int_0^t u_I dt$$

Po wykonaniu całkowania po lewej stronie otrzymujemy:

$$u_O(t) - u_O(0) = \frac{1}{T} \int_0^t u_I dt$$

Napięcie u_O w chwili $t=0$ jest równe zero, co wynika z równania:

$$u_O(0) = u_{C1}(0) + u_{C2}(0) = 0$$

Bierzemy tutaj pod uwagę to, że kondensatory są w chwili $t=0$ nienaładowane, a więc napięcia na nich są wtedy równe zero.

Odpowiedź: $u_O(t) = \frac{1}{T} \int_0^t u_I dt$. Analizowany obwód jest układem całkującym.

Zadanie 13.5

Odpowiedź: $I_O = \frac{1}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) U_I$

Zadanie 13.6

Odpowiedź: $I_O = \frac{U_2 - U_1}{R_2}$ (I_O nie zależy od R_0).

Zadanie 13.7

Odpowiedź: $I_O = -\frac{U_I}{R_2}$ (I_O nie zależy od R_O).

Zadanie 13.8

Rozwiązanie:

Impedancja wejściowa układu (rys. 13.4.I) jest równa:

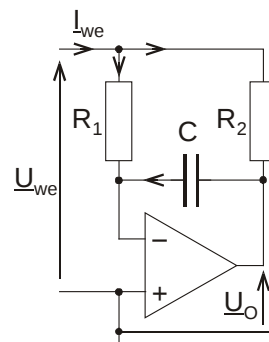
$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}_{we}}{\underline{I}_{we}}$$

Prąd wejściowy układu jest sumą prądów płynących przez rezystory:

$$\underline{I}_{we} = \frac{\underline{U}_{we}}{R_1} + \frac{\underline{U}_{we} - \underline{U}_O}{R_2}.$$

Napięcie $\underline{U}_O$ można wyznaczyć z równania na sumę prądów w węzle przy wejściu odwracającym:

$$\frac{\underline{U}_{we}}{R_1} + \underline{U}_O j\omega C = 0$$



Rys. 13.4.I

z którego wynika że:

$$\underline{U}_O = -\frac{\underline{U}_{we}}{j\omega R_1 C}.$$

Po uwzględnieniu tej zależności równanie określające prąd wejściowy układu przyjmie postać:

$$\underline{I}_{we} = \underline{U}_{we} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega R_1 R_2 C} \right).$$

Można z niego w łatwy sposób wyznaczyć admitancję wejściową obwodu:

$$\underline{Y}_{we} = \frac{1}{\underline{Z}_{we}} = \frac{\underline{I}_{we}}{\underline{U}_{we}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} - j \frac{1}{\omega R_1 R_2 C}$$

Postać wzoru na admitancję wejściową układu jest taka sama, jak dla obwodu równoległego RL:

$$\underline{Y} = G - jB$$

gdzie: konduktancja $G = \frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$, susceptancja indukcyjna $B = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\omega R_1 R_2 C}$. Z dwóch ostatnich związków można wyznaczyć poszukiwaną rezystancję i indukcyjność zastępczą.

Odpowiedź: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, $L = R_1 R_2 C$.

Zadanie 13.9

Odpowiedź: $L = \frac{R_1 R_2 R_4}{R_3} C$.

Zadanie 13.10

Odpowiedź: Impedancja wejściowa układu, równa: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = jR_0 R \omega C$, posiada tylko część urojoną. Po porównaniu jej z impedancją cewki idealnej $\underline{Z} = j\omega L$ okaże się, że układ zachowuje się jak indukcyjność o wartości: $L = R_0 R C$.

Zadanie 13.11

Odpowiedź: $\underline{Z}_{we} = -\frac{R_2}{R_1} \underline{Z}_0$.

Zadanie 13.12

Odpowiedź: $\underline{Z}_{we} = -\frac{R_1}{R_2} \underline{Z}_0$.

Zadanie 13.13

Odpowiedź: $\underline{Z} = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} = 9 \cdot 10^3 (1 - j) \Omega$

Zadanie 13.14

Odpowiedź: $\underline{Z} = R_1 \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega R_1 C} \approx 10^4 (1,1 + j0,88) \Omega$

Zadanie 13.15*Rozwiązanie:*

Oba wejścia wzmacniacza operacyjnego mają wspólny potencjał $\underline{V}$ (rys. 13.5.I). Dla wejścia odwracającego można zapisać równanie z metody potencjałów węzłowych:

$$\frac{\underline{U}_1 - \underline{V}}{R} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{V}}{R} = 0.$$

Po uproszczeniach uzyskuje się:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 - 2\underline{V} = 0$$

Potencjał $\underline{V}$ można wyznaczyć z dzielnika napięcia utworzonego przez reaktancję kondensatora i rezystancję R_1 :

$$\underline{V} = \underline{U}_1 \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \underline{U}_1 \frac{j\omega CR_1}{j\omega CR_1 + 1}$$

Eliminując potencjał $\underline{V}$ z pierwszego równania otrzymuje się:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 - 2\underline{U}_1 \frac{j\omega CR_1}{j\omega CR_1 + 1} = 0.$$

Równanie to przekształca się do postaci:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-1 + j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C}.$$

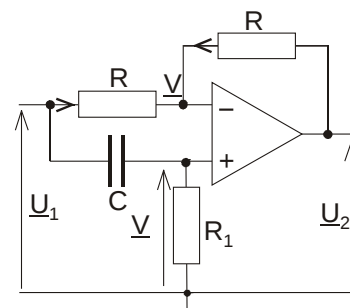
Postać liczb zespolonych w liczniku i mianowniku prawej strony należy zamienić na wykładniczą:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2} e^{j[\arctan(-\omega R_1 C) + \pi]}}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2} e^{j[\arctan(\omega R_1 C)]}} = 1 e^{j[-2\arctan(\omega R_1 C) + \pi]}.$$

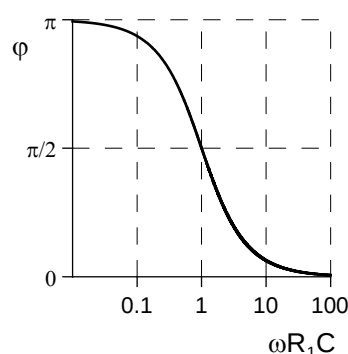
Poszukiwana funkcja jest równa:

$$\varphi(\omega R_1 C) = \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = -2 \arctan(\omega R_1 C) + \pi$$

Z postaci tej funkcji wynika, że jest to układ przesuwnika fazowego.



Rys. 13.5.I



Rys. 13.5.II

Odpowiedź: $\varphi(\omega R_1 C) = -2 \arctan(\omega R_1 C) + \pi$. Wykres funkcji przedstawiono na rys. 13.5.II

Zadanie 13.16

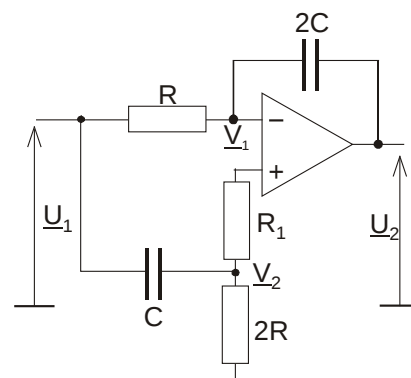
Odpowiedź: $R_2 C_2 = 318 \mu s$

Zadanie 13.17*Rozwiązanie:*

Wprowadzimy dwa nieznane potencjały V_1 , V_2 węzłów, jak na rys. 13.6.I. Spełniają one układ równań napisany według metody potencjałów węzłowych:

$$\underline{V}_1 \left(\frac{1}{R} + j2\omega C \right) = \frac{\underline{U}_1}{R} + \underline{U}_2 j2\omega C$$

$$\underline{V}_2 \left(\frac{1}{2R} + j\omega C \right) = \underline{U}_1 j\omega C$$



Rys. 13.6.I

Rezystor R_1 nie wchodzi do tych równań, ponieważ prąd przez niego płynący, który jest prądem wejściowym idealnego wzmacniacza operacyjnego, ma wartość równą zero. Z tego wynika też brak spadku napięcia na rezystorze R_1 . Ponadto napięcie między wejściami wzmacniacza jest także równe zero. Na tej podstawie możemy stwierdzić, że oba nieznane potencjały są jednakowe: $\underline{V}_1 = \underline{V}_2$. Po uwzględnieniu tej równości i dokonaniu prostych przekształceń układ równań przyjmie postać:

$$\underline{V}_1 \frac{1 + j2\omega RC}{R} = \frac{\underline{U}_1}{R} + \underline{U}_2 j2\omega C$$

$$\underline{V}_1 \frac{1 + j2\omega RC}{2R} = \underline{U}_1 j\omega C$$

Dzielimy oba równania stronami i uzyskujemy:

$$2 = \frac{1}{j\omega RC} + 2 \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}.$$

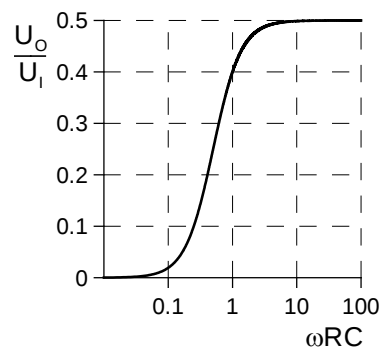
Z uzyskanej równości wyliczamy poszukiwany stosunek napięć.

Odpowiedź: $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = 1 + j \frac{1}{2\omega RC}$

Zadanie 13.18

Odpowiedź: $\frac{U_o}{U_1} = \frac{2(\omega RC)^2}{1 + 4(\omega RC)^2}.$

Wykres charakterystyki przedstawiono na rys. 13.7.I



Rys. 13.7.I

Zadanie 13.19

Odpowiedź:

a) $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}},$ b) $\frac{U_2}{U_1} = 2 \sqrt{\frac{1 + (\omega RC)^2}{1 + 25(\omega RC)^2}},$

c) $\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{0,25 + (\omega RC)^2},$ d) $\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{4 + (\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}},$

e) $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2},$ f) $\frac{U_2}{U_1} = \frac{2}{\sqrt{1 + 56(\omega RC)^2 + 16(\omega RC)^4}},$

g) $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}.$

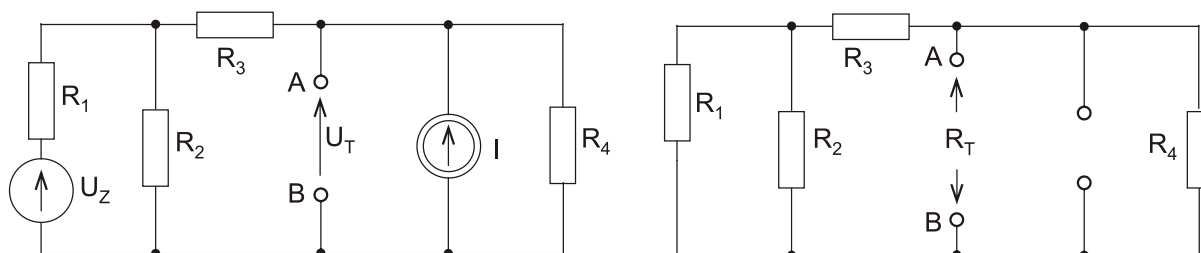
V. OBWODY NIELINIOWE

14. ROZWIĄZYWANIE OBWODÓW NIELINIOWYCH

Zadanie 14.1

Rozwiązanie:

Zadanie rozwiązujemy korzystając z twierdzenia Thevenina.



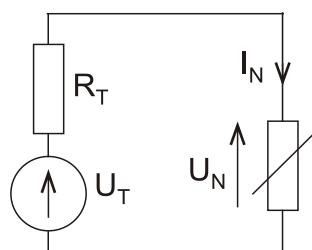
Rys. 14.1.I

Wycinając element nieliniowy z obwodu, obliczamy dla pozostałej – liniowej części obwodu parametry U_T i R_T zastępczego źródła napięciowego: U_T jako napięcie na otwartych zaciskach AB, R_T jako rezystancję między zaciskami AB w układzie bezźródłowym (patrz rys. 14.1.I). Uzyskujemy odpowiednio:

$$R_T = \frac{R_4 \cdot \left(R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right)}{R_4 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = 16\Omega$$

$$U_T = 44,8V$$

Dla układu zastępczego, jak na rys. 14.1.II, tworzymy układ równań:



Rys. 14.1.II

$$U_T - R_T \cdot I_N - U_N = 0$$

$$U_N = a \cdot I_N^3 + b \cdot I_N + c$$

który po wykonaniu przekształceń i podstawieniu danych liczbowych, przechodzi w równanie:

$$I_N^3 + 40 \cdot I_N - 85,6 = 0$$

Równanie rozwiązujemy np. iteracyjną metodą Newtona, tzn. dla równania w postaci:

$$f(I_N) = I_N^3 + 40 \cdot I_N - 85,6 = 0$$

tworzymy ciąg iteracyjny:

$$I_{N(k+1)} = I_{N(k)} - \frac{f(I_{N(k)})}{f'(I_{N(k)})} = I_{N(k)} - \frac{I_{N(k)}^3 + 40 \cdot I_{N(k)} - 85,6}{3 \cdot I_{N(k)}^2 + 40}$$

Ponieważ pierwiastków równania poszukujemy w przedziale od $I_N=0$ do $I_N=E_T/R_T=2,8$ wybieramy punkt startowy leżący w tym przedziale, np. $I_{N(0)}=1$, po czym w kolejnych krokach iteracji otrzymujemy kolejne przybliżenia wartości pierwiastka równania: $I_{N(0)}=1$, $I_{N(1)}=2,0372$, $I_{N(2)}=1,9544$, $I_{N(3)}=1,9528$, $I_{N(4)}=1,9536$. W iteracyjnej metodzie Newtona błąd wynikający z przyjęcia wyniku obliczeń z ostatniego wykonanego kroku iteracji jako wynik ostateczny nie przekracza – co do modułu – różnicy między wynikami z ostatnich dwóch wykonanych kroków

obliczeniowych. W rozpatrywanym przypadku biorąc pod uwagę moduł błędu bezwzględnego zdefiniowany jako:

$$\varepsilon_{M(k)} = |I_{N(k)} - I_{N(k-1)}|$$

otrzymujemy w kolejnych krokach następujące oszacowanie błędu dla wyniku obliczeń iteracyjnych: $\varepsilon_{M(1)}=1,0372$, $\varepsilon_{M(2)}=0,0828$, $\varepsilon_{M(3)}=0,0016$, $\varepsilon_{M(4)}=0,0008$. Zatem przyjmując wartość uzyskaną w czwartym kroku iteracji, tzn. $I_{N(4)}=1,9536$ jako wynik ostateczny, popełniamy błąd nie większy niż $\varepsilon_{M(4)}=0,0008$, co oznacza błąd względny około 0,041%. Po zaokrągleniu przyjmujemy więc jako rozwiązanie: $I_N=1,954$ A. Podstawiając to do równania charakterystyki napięciowo-prądowej elementu nieliniowego wyznaczamy także napięcie: $U_N=13,54$ V.

Rezystancją statyczną elementu nieliniowego nazywamy stosunek wartości napięcia do wartości prądu w punkcie pracy, zaś rezystancją dynamiczną – wartość pochodnej napięcia względem prądu w punkcie pracy, stąd:

$$R_s = \frac{U_N}{I_N} \Big|_{I_N=1,954A} \quad R_d = \frac{dU_N}{dI_N} \Big|_{I_N=1,954A}$$

Odpowiedź: $U_N=13,54$ V, $I_N=1,954$ A, $R_s=6,93$ Ω , $R_d=9,72$ Ω .

Zadanie 14.2

Odpowiedź: $U_N=17,92$ V, $I_N=1,471$ A, $R_s=12,18$ Ω , $R_d=6,83$ Ω .

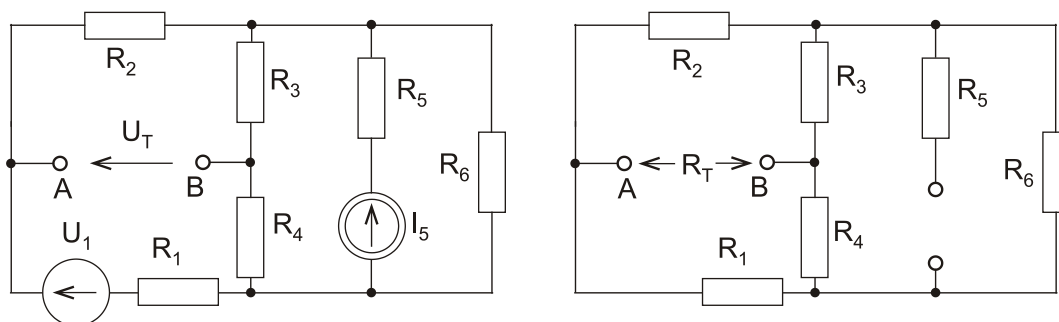
Zadanie 14.3

Odpowiedź: $U_N=3,4$ V, $I_N=2,81$ A, $R_s=1,21$ Ω , $R_d=0,355$ Ω ,
 $I_1=3,32$ A, $I_2=0,34$ A, $I_3=0,17$ A.

Zadanie 14.4

Rozwiązanie:

Punkt pracy elementu nieliniowego wyznaczamy w identyczny sposób, jak w zadaniu 14.1, tzn. korzystając z twierdzenia Thevenina i rozwiązując numerycznie uzyskane równanie nieliniowe.



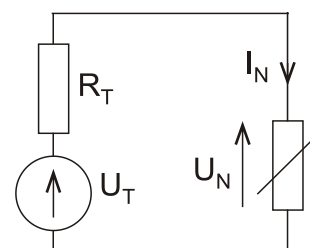
Rys. 14.4.I

Na podstawie schematów z rys. 14.4.I uzyskujemy $R_T=60$ Ω , $U_T=54$ V.

Dla układu zastępczego, jak na rys. 14.4.II, tworzymy układ równań:

$$U_T - R_T \cdot I_N - U_N = 0$$

$$I_N = a \cdot (1,04^{b \cdot U_N} - 1) + |U_N| \cdot (c \cdot U_N^3 + d \cdot U_N)$$



Rys. 14.4.II

który po wykonaniu przekształceń, podstawieniu danych liczbowych, oraz biorąc pod uwagę fakt, że przy uzyskanym schemacie zastępczym $U_N > 0$, przechodzi w równanie:

$$24 \cdot 1,04^{2 \cdot U_N} + 0,006 \cdot U_N^4 + 1,2 \cdot U_N^2 + U_N - 78 = 0$$

Równanie rozwiązujemy np. iteracyjną metodą Newtona, tworząc ciąg iteracyjny:

$$U_{N(k+1)} = U_{N(k)} - \frac{24 \cdot 1,04^{2 \cdot U_N} + 0,006 \cdot U_{N(k)}^4 + 1,2 \cdot U_{N(k)}^2 + U_{N(k)} - 78}{1,8826 \cdot 1,04^{2 \cdot U_N} + 0,024 \cdot U_{N(k)}^3 + 2,4 \cdot U_{N(k)} + 1}$$

Ponieważ pierwiastków równania poszukujemy w przedziale od $U_N=0$ do $U_N=E_T=54$ V wybieramy punkt startowy leżący w tym przedziale, np. $U_{N(0)}=5$ V, i po dwóch krokach iteracji otrzymujemy wartość pierwiastka równania $U_N=5,195$ V z błędem nie większym niż 1 mV. Podstawiając to do równania charakterystyki napięciowo-prądowej elementu nieliniowego wyznaczamy także prąd: $I_N=0,814$ A.

Ze względu na złożony charakter obwodu, nie jest możliwe obliczenie pozostałych prądów w obwodzie tylko w oparciu o wyznaczony punkt pracy elementu nieliniowego. W związku z tym obliczamy rezystancję statyczną elementu nieliniowego w wyznaczonym punkcie pracy:

$$R_s \Big|_{I_N=0,814 \text{ A}} = \frac{U_N}{I_N} = 6,38 \Omega$$

po czym zastępujemy element nieliniowy jego rezystancją statyczną i rozwiązujemy tak powstały obwód liniowy prądu stałego dowolną metodą.

Odpowiedź: $I_1=0,72$ A, $I_2=0,094$ A, $I_3=0,19$ A, $I_4=1,003$ A, $I_6=0,515$ A, $I_N=0,814$ A.

Zadanie 14.5

Odpowiedź: $I_1=1,49$ A, $I_2=0,34$ A, $I_3=0,23$ A, $I_4=0,92$ A, $I_N=1,15$ A, $U_N=0,91$ V.

Zadanie 14.6

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $U_N=8$ V, $I_N=2,167$ A, $I_1=2$ A, $I_2=0,167$ A.

Zadanie 14.7

Odpowiedź: $R_2=4 \Omega$, $R_d=4 \Omega$, $U_d=-4$ V.

Zadanie 14.8

Odpowiedź: $R_d=0,31 \Omega$, $U_d=4$ V, $U_2=4,85$ V, $I_2=2,63$ A.

Zadanie 14.9

Odpowiedź: $R_d=23 \Omega$, $U_d=-20$ V, $U_1=26$ V, $I_1=2$ A.

Zadanie 14.10

Odpowiedź: pozycja 1: $U_N=2,09$ V, $I_N=0,473$ A,
pozycja 2: $U_N=-1,64$ V, $I_N=-0,546$ A.

Zadanie 14.11

Odpowiedź: $U=150$ V.

Zadanie 14.12

Odpowiedź: $U_N=4,05$ V, $I_N=0,596$ A, $I_1=0,964$ A, $I_2=0,833$ A, $I_3=0,369$ A, $I_4=0,464$ A,

$$I_5 = 0,131 \text{ A}, \Sigma P = 29,3 \text{ W}.$$

Zadanie 14.13*Rozwiązanie:*

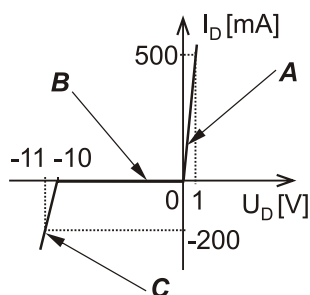
Podana charakterystyka diody Zenera składa się z trzech odcinków: **A**, **B** i **C** (patrz rys. 14.13.I). Dla każdego z nich można sformułować równanie, wyrażające zależność napięcia od prądu:

$$\mathbf{A:} \quad U_D = 2 \cdot I_D,$$

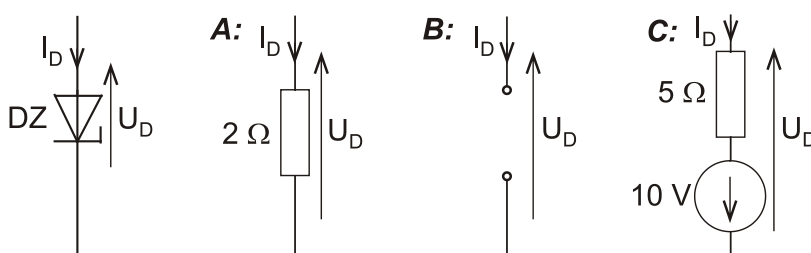
$$\mathbf{B:} \quad I_D = 0,$$

$$\mathbf{C:} \quad U_D = -10 + 5 \cdot I_D,$$

gdzie U_D oraz I_D oznaczają odpowiednio napięcie i prąd diody Zenera, strzałkowane tak jak przedstawiono na rys. 14.13 w treści zadania. Z równań tych wynikają następujące schematy zastępcze zlinearyzowane, przedstawione na rys. 14.13.II:



Rys. 14.13.I



Rys. 14.13.II

gdzie rezystancja występująca w schemacie zastępczym zlinearyzowanym jest równa rezystancji dynamicznej diody Zenera na danym odcinku jej charakterystyki, a wartość napięcia źródłowego jest równa współrzędnej napięciowej punktu przecięcia odcinka charakterystyki diody (lub prostej, będącej jego przedłużeniem) z osią napięcia.

Odpowiedź: Schematy zastępcze zlinearyzowane przedstawiono na rys. 14.13.II.

Zadanie 14.14

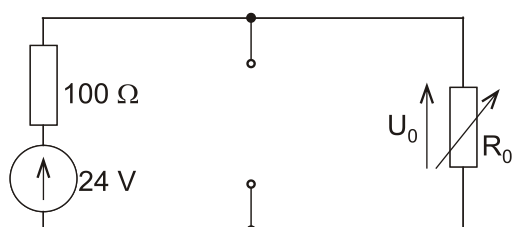
Odpowiedź: $U_d = -9 \text{ V}$, $R_d = 80 \Omega$.

Zadanie 14.15*Rozwiązanie:*

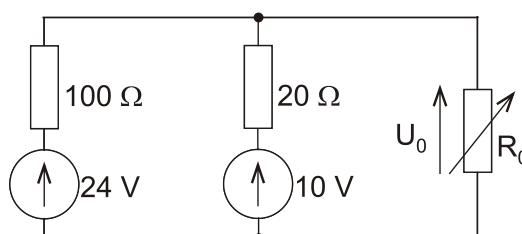
Narzucony w zadaniu zakres napięcia obejmuje dwa odcinki charakterystyki diody Zenera. Dla napięć z zakresu $8 \text{ V} \leq U_0 \leq 10 \text{ V}$ rezystancja dynamiczna diody jest nieskończenie wielka – dioda nie przewodzi, stąd otrzymujemy schemat przedstawiony na rys. 14.15.I, z którego wyznaczamy wartość napięcia U_0 , która zgodnie z warunkami zadania musi być nie mniejsza niż 8 V :

$$U_0 = \frac{24 \cdot R_0}{100 + R_0} \geq 8 \text{ V}$$

co po rozwiązaniu nierówności daje warunek dla R_0 : $R_0 \geq 50 \Omega$.



Rys. 14.15.I



Rys. 14.15.II

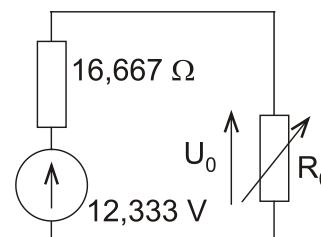
Dla napięć z zakresu $10 \text{ V} \leq U_0 \leq 12 \text{ V}$ rezystancja dynamiczna diody jest równa 20Ω , charakterystyka przecina oś napięć w punkcie o współrzędnej -10V , więc uwzględniając schemat zastępczy zlinearyzowany diody otrzymujemy obwód przedstawiony na rys. 14.15.II.

Korzystamy z twierdzenia Thevenina, tzn. wycinając R_0 z obwodu, obliczamy parametry E_T i R_T zastępczego źródła napięciowego. Po obliczeniach uzyskujemy $U_T=12,333 \text{ V}$, $R_T=16,667 \Omega$. W utworzonym w ten sposób schemacie zastępczym, przedstawionym na rys. 14.15.III, wyznaczamy wartość napięcia U_0 , która zgodnie z warunkami zadania musi być nie większa niż 12 V :

$$U_0 = \frac{12,333 \cdot R_0}{16,667 + R_0} \leq 12 \text{ V}$$

co po rozwiązaniu nierówności daje warunek dla R_0 : $R_0 \leq 600 \Omega$.

Odpowiedź: $50 \Omega \leq R_0 \leq 600 \Omega$.



Rys. 14.15.III

Zadanie 14.16

Odpowiedź: a) $U_0=18,71 \text{ V}$, $P_D=5,3 \text{ W}$,
b) $U_0=16,13 \text{ V}$, $P_D=0 \text{ W}$.

Zadanie 14.17

Odpowiedź: $3 \Omega \leq R_0 \leq 46,5 \Omega$.

Zadanie 14.18

Odpowiedź: $U_0 = 20 - 100 \cdot I_0$ dla $U_0 < 5 \text{ V}$,
 $U_0 = 5,714 - 4,762 \cdot I_0$ dla $U_0 > 5 \text{ V}$.

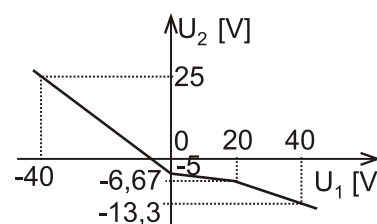
Zadanie 14.19

Odpowiedź: $R_0 > 142,9 \Omega$.

Zadanie 14.20

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} U_2 &= -5 - 0,75 \cdot U_1 & \text{dla} & \quad -40 \text{ V} \leq U_1 \leq 0 \text{ V}, \\ U_2 &= -5 - 0,0833 \cdot U_1 & \text{dla} & \quad 0 \text{ V} < U_1 \leq 20 \text{ V}, \\ U_2 &= -0,333 \cdot U_1 & \text{dla} & \quad 20 \text{ V} < U_1 \leq 40 \text{ V}. \end{aligned}$$



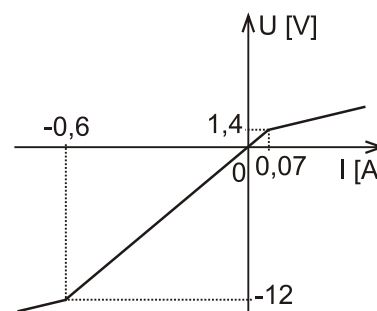
Rys. 14.20.I

Wykres charakterystyki przedstawiono na rys. 14.20.I.

Zadanie 14.21

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} U &= -6 + 10 \cdot I & \text{dla} & \quad U \leq -12 \text{ V}, \\ U &= 20 \cdot I & \text{dla} & \quad -12 \text{ V} < U \leq 1,4 \text{ V}, \\ U &= 0,7 + 10 \cdot I & \text{dla} & \quad U > 1,4 \text{ V}. \end{aligned}$$



Rys. 14.21.I

Wykres charakterystyki przedstawiono na rys. 14.21.I.

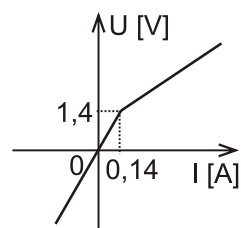
Zadanie 14.22

Odpowiedź:

$$U = 10 \cdot I \quad \text{dla} \quad U \leq 1,4 \text{ V},$$

$$U = 0,7 + 5 \cdot I \quad \text{dla} \quad U > 1,4 \text{ V}.$$

Wykres charakterystyki przedstawiono na rys. 14.20.I.



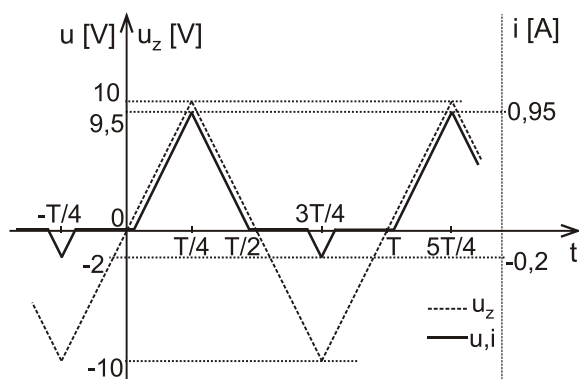
Rys. 14.22.I

Zadanie 14.23

Odpowiedź: $U = 0,5 \cdot U_0^3 + 1,5 \cdot U_0$.

Zadanie 14.24

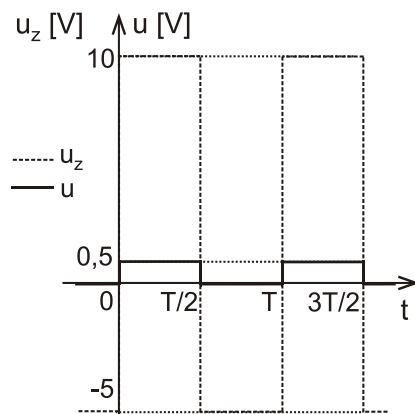
Odpowiedź: Wykres przedstawiono na rys. 14.24.I; przebiegi prądu i napięcia są identyczne, różnią się tylko skalą.



Rys. 14.24.I

Zadanie 14.25

Odpowiedź: Wykres przedstawiono na rys. 14.25.I.



Rys. 14.25.I

Zadanie 14.26

Rozwiązanie:

Jak wynika z analizy danych obwodu, punkt pracy elementu nieliniowego przesuwają się na charakterystyce napięciowo-prądowej wskutek działania sinusoidalnego napięcia $u_2(t)$, lecz ze względu na bardzo małą amplitudę tego napięcia oscyluje on w pobliżu ustalonego położenia, będącego wynikiem działania stałego napięcia źródłowego U_1 . Zadanie rozwiązujemy więc, stosując metodę analizy małosygnałowej obwodu.

Najpierw pomijamy niewielki sygnał zmienny $u_2(t)$ i wyznaczamy ustalony punkt pracy obwodu w identyczny sposób, jak w zadaniu 14.1, tzn. korzystając z twierdzenia Thevenina i rozwiązując numerycznie uzyskane równanie nieliniowe.

Na podstawie schematów przedstawionych na rys. 14.26.I uzyskujemy $R_T = 10 \, \Omega$, $U_T = 10,8 \text{ V}$.

Dla układu zastępczego, jak na rys. 14.26.II, tworzymy układ równań:

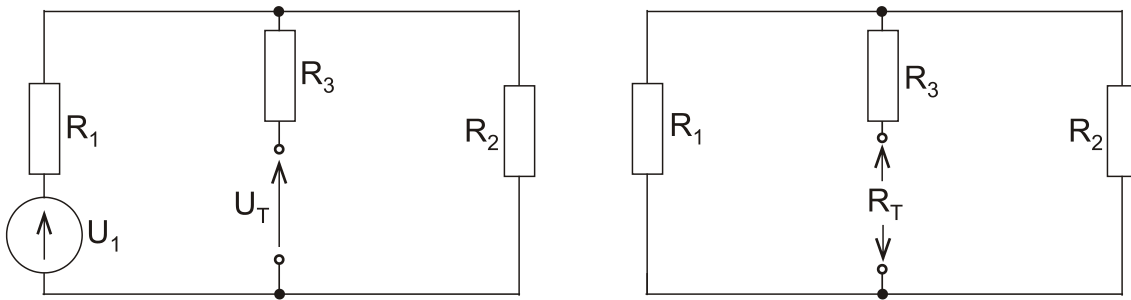
$$U_T - R_T \cdot I_N - U_N = 0$$

$$U_N = a \cdot I_N + b \cdot I_N^2$$

(w drugim równaniu, tzn. charakterystyce elementu nieliniowego, możemy pominąć znak modułu, gdyż przy podanym układzie połączeń punkt pracy elementu leży zawsze w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych). Po wykonaniu przekształceń, podstawieniu danych liczbowych, otrzymujemy równanie:

$$I_N^2 + 200 \cdot I_N - 108 = 0$$

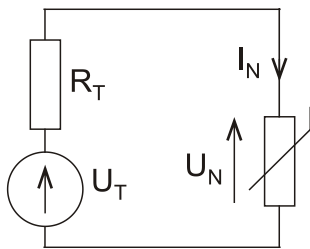
którego pierwiastkiem jest $I_N = 0,5385$ A.



Rys. 14.26.I

Następnie obliczamy rezystancję dynamiczną elementu nieliniowego w wyznaczonym punkcie pracy:

$$R_d = \left. \frac{dU_N}{dI_N} \right|_{I_N=0,5385\text{A}} = 10,108 \, \Omega \approx 10,11 \, \Omega.$$



Rys. 14.26.II

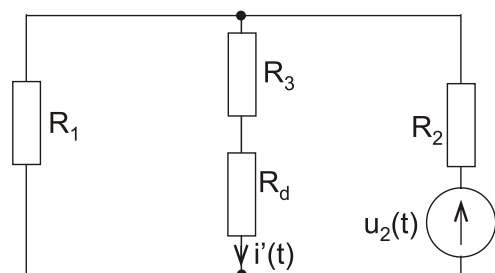
Dla wyznaczenia zmiennej składowej prądu, pochodzącej od źródła napięcia sinusoidalnego, zastępujemy element nieliniowy jego rezystancją dynamiczną, pomijamy źródło napięcia stałego U_1 i rozwiązujemy tak powstały prosty obwód liniowy prądu sinusoidalnie zmiennego, przedstawiony na rys. 14.26.III.

Otrzymujemy w wyniku:

$$i'(t) = 0,004973 \cdot \sin 1000t \text{ A} \approx 0,005 \cdot \sin 1000t \text{ A}.$$

Ostatecznym rozwiązaniem jest suma składowej stałej prądu I_N oraz składowej zmiennej prądu $i'(t)$.

Odpowiedź: $i_N(t) = 0,5385 + 0,005 \cdot \sin 1000t \text{ A}.$



Rys. 14.26.III

Zadanie 14.27

Odpowiedź: $i_N(t) = 0,3395 + 0,0109 \cdot \sin 314t \text{ A}.$

LITERATURA

1. Bolkowski S.: Elektrotechnika teoretyczna. Tom 1. Teoria obwodów elektrycznych. Warszawa: WNT 2001.
2. Bolkowski S., Brociek W., Rawa H.: Teoria obwodów elektrycznych. Zadania. Warszawa: WNT 1998.
3. Cholewicki T.: Elektrotechnika teoretyczna. Warszawa: WNT 1973.
4. Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna. Obwody liniowe i nieliniowe. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1995.
5. Kurdziel R.: Podstawy elektrotechniki. Warszawa: WNT 1972.
6. Mikołajuk K., Trzaska Z.: Elektrotechnika Teoretyczna. Analiza i synteza elektrycznych obwodów liniowych. Warszawa: PWN 1987.
7. Mikołajuk K., Trzaska Z.: Elektrotechnika Teoretyczna. Analiza i synteza elektrycznych obwodów nieliniowych. Warszawa: PWN 1987.
8. Cichocki A., Mikołajuk K., Osowski S., Trzaska Z.: Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej. Warszawa: PWN 1976.