DRGANIA MASY ZAWIESZONEJ NA SPRĘŻYNIE 15

I.1. Siły sprężyste

Robert Hooke sformułował w r. 1660 ogólne prawo opisujące własności sprężyste ciał stałych mówiące, że odkształcenie ciała jest proporcjonalne do przyłożonego naprężenia. Prawo to jest spełnione dla małych odkształceń W tym ćwiczeniu ograniczymy się do rozważań tylko takich właśnie odkształceń. W przypadku rozciąganej lub ściskanej sprężyny miarą odkształcenia jest jej wydłużenie x (dodatnie, gdy sprężyna jest rozciągana a ujemne, gdy jest ściskana). Ponieważ naprężenie jest proporcjonalne do działającej siły zewnętrznej F_z powodującej odkształcenie prawo Hooke'a dla sprężyny można zapisać w postaci:

$$F_z = kx \tag{1}$$

Współczynnik proporcjonalności k charakteryzuje własności sprężyste określonej sprężyny

Pionowo wiszącą sprężynę można rozciągnąć zawieszając na jej dolnym końcu ciężarek o masie m. Rozważmy najpierw przypadek, gdy sprężyna jest nieważka lub jej masa własna jest znikomo mała w porównaniu z masą zawieszonego na niej ciężarka. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona, sprężyna rozciągnięta ciężarkiem, działa na ciężarek siłą sprężystą F_{spr} równą co do wartości sile rozciągającej sprężynę (1), lecz przeciwnie do niej skierowaną. Zapisujemy to:

$$F_{spr} = -kx \tag{2}$$

Ciężarek będzie w równowadze w położeniu, x_o, w którym siła sprężystości zrównoważy jego ciężar mg:

$$mg - kx_o = 0 \tag{3}$$

Stąd wydłużenie x_o odpowiadające stanowi równowagi jest równe:

$$x_o = \frac{mg}{k} \tag{4}$$

I.2. Równanie ruchu ciężarka zawieszonego na nieważkiej sprężynie.

Jeśli sprężyna zostanie wydłużona tak, by wypadkowa ciężaru (mg) i siły sprężystej (– kx), działających na masę m nie była równa zeru, wówczas zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, ciężarek będzie poruszał się ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Równanie ruchu ma postać:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx \tag{5a}$$

lub po podzieleniu przez m i po uwzględnieniu wzoru (4):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x - x_o) = 0 \tag{5b}$$

Wprowadzając nową zmienną $z = x - x_o$, określającą wychylenie masy m z położenia równowagi, otrzymujemy

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0 \tag{5c}$$

Rozwiązaniem równania (5c) jest funkcja opisująca drganie harmoniczne wokół położenia równowagi

$$z = A\cos(\omega_o t + \varphi) \tag{6}$$

gdzie A jest amplitudą drgania (maksymalnym wychyleniem z położenia równowagi), ω_o, równe

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7a}$$

jest nazywane częstością kołową, a φ jest fazą początkową drgania.

Amplituda A i faza początkowa φ zależą od warunków początkowych (od tego jak puścimy w ruch ciężarek). Czas T_o, w którym układ wykonuje jedno drganie nazywany okresem drgań jest równy:

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{7b}$$

Zmiana wartości amplitudy drgań nie powoduje zmiany ich częstości. Ten fakt zwany **izochronizmem drgań** jest konsekwencją liniowego związku pomiędzy siłą sprężystą F_s a wydłużeniem x sprężyny (wzór (2)).

I.3. Ruch ciężarka zawieszonego na sprężynie, której masa $m_s \neq 0$

Ruch ten opisuje wzór podobny do wzoru (6), z tym, że okres drgań T jest dłuższy, równy:[1]

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}} \tag{8}$$

to jest taki, jaki byłby w przypadku nieważkiej sprężyny o takim samym współczynniku sprężystości, obciążonej ciężarkiem o łącznej masie $M = m+1/3\ m_s$. Zależność wyrażoną wzorem (8) można przedstawić w wygodniejszej do obliczeń postaci, podnosząc ją do kwadratu:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} + \frac{4\pi^2 m_s}{3k} \tag{9a}$$

Widać, że T^2 zależy w sposób liniowy od wartości masy m zawieszonej na sprężynie, co możemy zapisać w sposób uproszczony:

$$T^2 = Am + B \tag{9b}$$

Współczynnik kierunkowy prostej A opisującej zależność T^2 (m) jest równy

$$A = \frac{4\pi^2}{k} \tag{10}$$

zaś wartość rzędnej B, dla m=0 jest równa

$$B = T^2(m=0) = \frac{4\pi^2 m_s}{3k} = A\frac{m_s}{3} \tag{11}$$

[1] Patrz Dodatek I

DODATEK 1. DO *ĆWICZENIA Nr 15*

Wyprowadzenie równania (8)

Aby znaleźć równanie ruchu ciężarka zawieszonego na sprężynie, której masy m_s nie można zaniedbać, skorzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej mówiącej, że w układzie ciał, na które działają tylko siły zachowawcze, suma energii kinetycznej E_{kin} i potencjalnej E_p pozostaje stała, czyli:

$$E_{mech} = E_{kin} + E_p = \text{const.} \tag{D1}$$

Na E_p układu składa się składa się energia sprężysta odkształconej sprężyny $E_{p\,spr}$ i energia potencjalna grawitacyjna $E_{p\,graw}$ wynikająca z przyciągania obu mas (m i m_s) przez masę Ziemi M_{Ziemi}.
Jeśli przyjmiemy, że sprężysta energia potencjalna nie odkształconej sprężyny jest równa zeru, to po odkształceniu równa jest pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną F_{zewn} podczas wydłużania sprężyny

$$E_{p\,spr} = \int_0^x F_{zewn} \cdot dx = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{1}{2}kx^2 \tag{D2}$$

Grawitacyjna energia potencjalna mas m i m_s, oznaczona jako $E_{p\,graw}$, (wynikająca z przyciągania obu mas przez Ziemię) przy wydłużaniu sprężyny maleje, gdyż masy zajmują niższe położenie. Przyjmijmy, że dla x=0 $E_{pgraw}(0)=0$. Gdyby sprężyna była nieważka, to grawitacyjna energia potencjalna byłaby równa

$$E_{pgraw}(x) = -P\,x \tag{D3a}$$

gdzie P-ciężar masy zawieszonej na sprężynie. $P = mg = kx_0$ (porównaj ze wzorem (4))
W przypadku sprężyny ważkiej, P we wzorze (D3a) trzeba zastąpić przez ciężar efektywny $P_{ef} = kx_r$ gdzie x_r jest wydłużeniem sprężyny pod wpływem własnego ciężaru i ciężaru masy m, gdy układ jest w równowadze. Zatem grawitacyjna energia potencjalna układu ważka sprężyna +masa m może być wyrażona wzorem

$$E_{pc} = -k\,x_r \cdot x \tag{D3}$$

Energia kinetyczna układu ciężarek – sprężyna jest sumą energii kinetycznej ciężarka

$$E_{k\,cięż} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{D4}$$

i energii kinetycznej sprężyny, której górny koniec jest nieruchomy, a dolny porusza się z prędkością v taką samą jak ciężarek. Masa dm_s elementu sprężyny o długości dy wynosi

$$dm_s = \frac{m_s}{L} \cdot dy \tag{D5}$$

gdzie L jest długością sprężyny.
Prędkość elementu masy sprężyny, oddalonego o y od górnego, nieruchomego końca, jest proporcjonalna do odległości y

$$v(y) = v \cdot \frac{y}{L} \tag{D6}$$

Dlatego energia kinetyczna tego elementu będzie równa

$$dE_{k\,spr}(y) = \frac{dm_s \cdot v^2(y)}{2} = \frac{m_s \cdot v^2 \cdot y^2}{2L^3}dy \tag{D7}$$

a energia kinetyczna całej sprężyny

$$E_{kspr} = \int_0^L dE_{kspr}(y) = \frac{m_s \cdot v^2}{2L^3}\int_0^L y^2\,dy = \frac{1}{2}\frac{m_s \cdot v^2}{3}. \tag{D8}$$

Podstawiając wzory .(D2), (D3), (D4) i (D8).do (D1) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}kx^2 - kx_r \cdot x + \frac{1}{2}(m + \frac{1}{3}m_s) \cdot v^2 = \text{const} \tag{D9}$$

Różniczkując względem czasu równanie (D9) otrzymuje się następujące równanie ruchu

$$(m+\frac{1}{3}m_s)\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+k(x-x_r)=0 \tag{D10}$$

lub po wprowadzeniu nowej zmiennej $z = x - x_r$ (z jest wydłużeniem z liczonym od punktu równowagi)

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{k}{m+\frac{1}{3}m_s}\cdot z=0 \tag{D11}$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja:

$$z=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{D12}$$

w której

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+\frac{1}{3}m_s}}=\frac{2\pi}{T} \tag{D13}$$

Zatem okres drgań T jest równy

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{1}{3}m_s}{k}} \tag{D14}$$

co jest zgodne ze wzorem (8) z instrukcji do ćwiczenia.