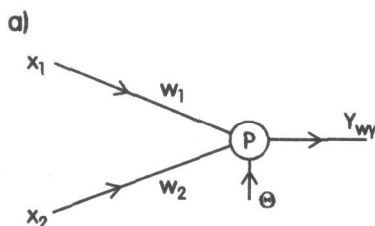


5.3. Problemy techniczne dla stopnia III

Problem techniczny 5.22

Na rysunku 5.22a przedstawiono schematycznie tzw. sygnały wejściowe i wyjściowe perceptronu. Element ten realizuje proste funkcje logiczne. Sygnały wejściowe x_1 , x_2 przyjmują wartości binarne (dwójkowe), tzn. zero lub jeden $\{0, 1\}$.



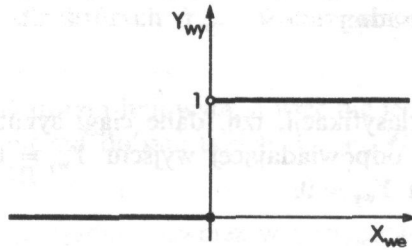
Rys. 5.22a

Sygnały te są mnożone odpowiednio przez wagi w_1 , w_2 (będące liczbami rzeczywistymi). W perceptronie iloczyny $x_1 w_1$ oraz $x_2 w_2$ są dodawane, a następnie od ich sumy jest odejmowana tzw. wartość progowa Θ (która jest liczbą rzeczywistą). Zatem w perceptronie sygnały wejściowe są przekształcane w sygnał X_{we} (liczba rzeczywista), przy czym

$$X_{we} = x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 - \Theta.$$

Sygnał ten jest podawany na wejście przekaźnika dwupołożeniowego, którego charakterystykę wejście-wyjście przedstawiono na rys. 5.22b. W zależności od wartości X_{we} otrzymujemy sygnał wyjściowy Y_{wy} (liczba binarna 0 lub 1).

b)



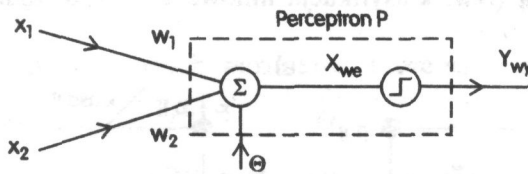
Rys. 5.22b

Zasada działania perceptronu jest następująca:

jeżeli $X_{we} = x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 - \Theta > 0$, to $Y_{wy} = 1$, a jeżeli $X_{we} \leq 0$, to $Y_{wy} = 0$.

Perceptron można więc przedstawić jako szeregowe połączenie sumatora i przełącznika dwupołożeniowego (rys. 5.22c).

c)



Rys. 5.22c

Perceptron może realizować proste funkcje logiczne, np. sumę logiczną (tzw. OR — tabl. 1), gdy dobierzemy właściwe wagi w_1 , w_2 oraz próg Θ . Na przykład, jeśli $w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $\Theta = 0,5$, to perceptron realizuje sumę logiczną (tabl. 2).

Tablica 1

x_1	x_2	Y_{wy}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tablica 2

x_1	x_2	X_{we}	Y_{wy}
0	0	-0,5	0
0	1	0,5	1
1	0	0,5	1
1	1	1,5	1

Tablica 3

x_1	x_2	Y_{wy}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Dobierz takie wartości wag w_1 , w_2 i progu Θ , aby perceptron realizował funkcję XOR opisaną w tabl. 3.

Czy do realizacji takiej funkcji wystarczy jeden perceptron, czy potrzeba ich więcej? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Perceptron dokonuje klasyfikacji, tzn. dane ciągi sygnałów wejściowych x_1 , x_2 zalicza do klasy A odpowiadającej wyjściu $Y_{wy} = 1$, a inne do klasy B odpowiadającej wyjściu $Y_{wy} = 0$.

Dla klasy A

$$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 - \Theta \leq 0 \Rightarrow Y_{wy} = 0.$$

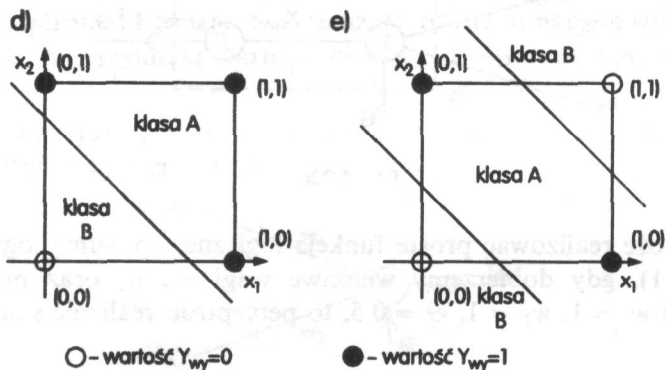
Dla klasy B

$$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 - \Theta > 0 \Rightarrow Y_{wy} = 1.$$

Równanie

$$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 - \Theta = 0$$

opisuje linię prostą (tzw. klasyfikacja liniowa we współrzędnych x_1 , x_2).



Rys. 5.22d,e

W przypadku realizacji funkcji OR otrzymamy linię prostą przedstawioną na rys. 5.22d. Jak widać, w tym przypadku jest możliwe oddzielenie linią prostą zbioru takich sygnałów wejściowych x_1 , x_2 , dla których $Y_y = 1$, od takich sygnałów wejściowych x_1 , x_2 , dla których $Y_y = 0$.

W przypadku realizacji funkcji XOR otrzymamy dwie linie proste przedstawione na rys. 5.22e. W tym przypadku nie jest możliwe przeprowadzenie jednej prostej o równaniu

$$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 - \Theta = 0$$

tak, aby wszystkie punkty, dla których sygnał wyjściowy Y_{wy} przyjmuje

wartość logiczną 1 (zaznaczone na czarno) leżały po jednej stronie prostej (klasa A), a punkty, dla których $Y_{wy} = 0$ (zaznaczone na biało) leżały po drugiej stronie prostej.

Perceptron jest klasyfikatorem liniowym, a więc nie jest w stanie tego zadania zrealizować, tzn. nie można dobrać takich w_1, w_2, Θ , aby jeden perceptron realizował funkcję XOR.

Powyższą tezę można uzasadnić również w następujący sposób:

Dla $x_1 = 0, x_2 = 0$ sygnał $X_{we} = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 - \Theta < 0$ — aby $Y_{wy} = 0$, to $\Theta > 0$.

Dla $x_1 = 1, x_2 = 0$ sygnał $X_{we} = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 - \Theta > 0$ — aby $Y_{wy} = 1$, to $w_1 > \Theta$.

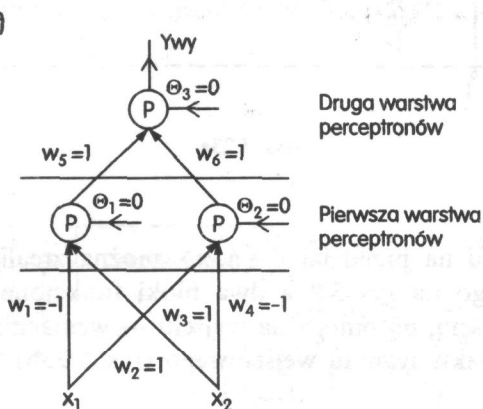
Dla $x_1 = 0, x_2 = 1$ sygnał $X_{we} = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 - \Theta > 0$ — aby $Y_{wy} = 1$, to $w_2 > \Theta$.

Dla $x_1 = 1, x_2 = 1$ sygnał $X_{we} = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 - \Theta < 0$ — aby $Y_{wy} = 0$, to $w_1 + w_2 < \Theta$.

Otrzymujemy implikację czterech warunków, które są ze sobą sprzeczne:

$$\Theta > 0 \wedge w_1 > \Theta \wedge w_2 > \Theta \wedge w_1 + w_2 < \Theta.$$

Problem realizacji funkcji XOR rozwiązuje dopiero perceptron dwuwarstwowy (dwie warstwy perceptronów). Przykładową realizację przedstawiono na rys. 5.22f.



Rys. 5.22f

Oczywiście wagi i progi mogą być dobrane na wiele sposobów.

Problem techniczny 5.23

Funkcja $\sin(x)$ może być aproksymowana w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ za pomocą funkcji wymiernej

$$\sin(x) \approx \frac{-0,5961 \cdot 10^{-2} + 3,166x - x^2}{3,087 - 0,775x + 0,2465x^2}$$

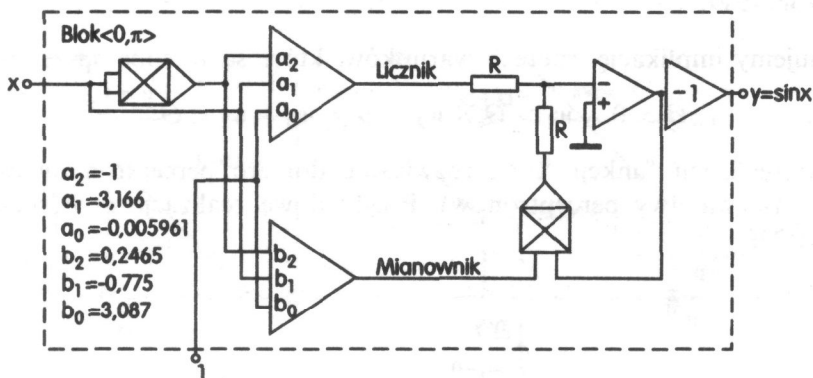
1. Wykorzystując mnożniki analogowe i inne elementy elektroniczne zaproponuj obwód realizujący tę funkcję w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.
2. Zaproponuj schemat umożliwiający rozszerzenie aproksymacji funkcji $\sin(x)$ na przedział $\langle -\pi, \pi \rangle$, w którym opracowany w punkcie 1 schemat będzie wykorzystywany jako blok funkcjonalny.

Rozwiązanie

Ad. 1

Przykładowe rozwiązanie przedstawiono na rys. 5.23a.

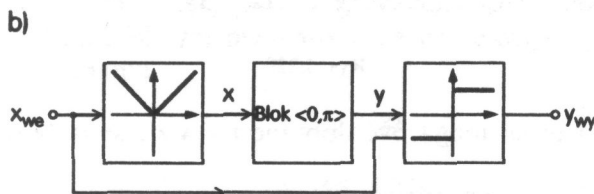
a)



Rys. 5.23a

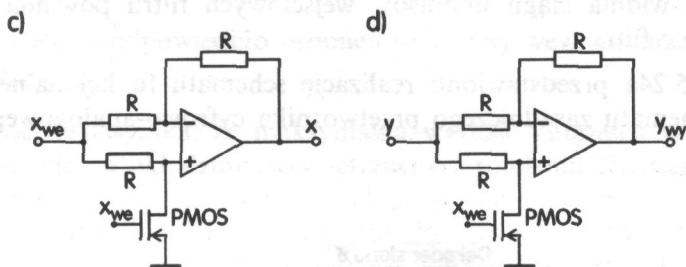
Ad. 2

Rozszerzenie zakresu na przedział $\langle -\pi, \pi \rangle$ można zrealizować dodając do schematu pokazanego na rys. 5.23a dwa bloki funkcjonalne: blok wartości bezwzględnej na wejściu, natomiast na wyjściu — wzmacniacz o wzmocnieniu ± 1 zależnym od znaku sygnału wejściowego (rys. 5.23b).



Rys. 5.23b

Przykładową realizację bloku wartości bezwzględnej pokazano na rys. 5.23c, a wzmacniacza o wzmocnieniu $K = \pm 1$ (znak wzmocnienia zależy od znaku sygnału x) pokazano na rys. 5.23d.



Rys. 5.23c,d

Problem techniczny 5.24

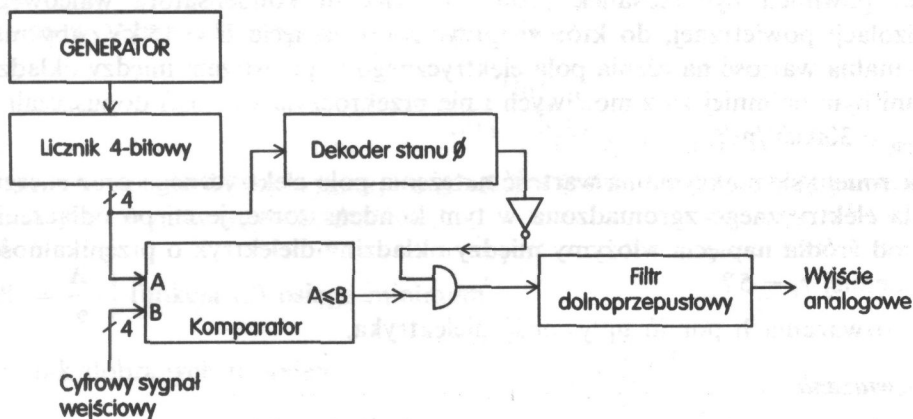
Zaproponuj schemat funkcjonalny (blokowy) i zasadniczy 4-bitowego przetwornika cyfrowo-analogowego, składającego się z układów cyfrowych i filtru analogowego.

Jakie powinny być relacje między sygnałem wejściowym filtru a jego charakterystyką częstotliwościową?

Rozwiązanie

Należy zamienić cyfrowy sygnał wejściowy na ciąg impulsów o stałej częstotliwości i wypełnieniu proporcjonalnym do wartości tego sygnału, a następnie podać ten ciąg impulsów na wejście filtru dolnoprzepustowego.

a)

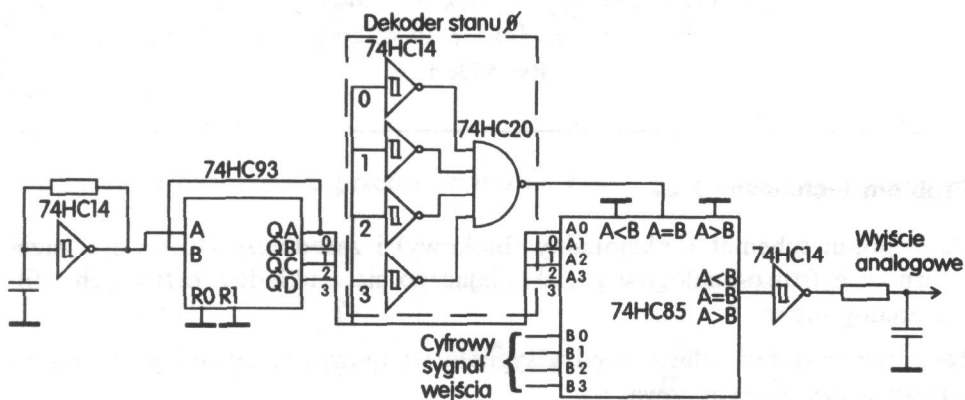


Rys. 5.24a

Charakterystyka częstotliwościowa filtru powinna być taka, aby obejmowała widmo sygnału wejściowego filtru od składowej stałej do harmonicznej o częstotliwości odpowiadającej częstotliwości wejściowej sygnału cyfrowego. Pozostała część widma ciągu impulsów wejściowych filtru powinna być wytłumiona przez filtr.

Na rysunku 5.24a przedstawiono realizację schematu funkcjonalnego, a na rys. 5.24b schematu zasadniczego przetwornika cyfrowo-analogowego.

b)



Rys. 5.24b

Problem techniczny 5.25

Jaki powinien być stosunek promieni okładzin kondensatora walcowego o izolacji powietrznej, do którego przyłożono napięcie $U = 15 \text{ kV}$, aby maksymalna wartość natężenia pola elektrycznego w przestrzeni między okładzinami była najmniejsza z możliwych i nie przekroczyła wartości dopuszczalnej $E_{\text{dop}} = 300 \text{ kV/m}$?

Jak zmieni się maksymalna wartość natężenia pola elektrycznego oraz energia pola elektrycznego zgromadzona w tym kondensatorze, jeżeli po odłączeniu go od źródła napięcia włożymy między okładziny dielektryk o przenikalności względnej $\epsilon_r = 5$?

W rozważaniach pominiemy upływność dielektryka.

Rozwiązanie

Natężenie pola elektrycznego w przestrzeni między okładzinami kondensatora walcowego, przy zadanym napięciu wyraża się zależnością

$$E(r) = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (1)$$

gdzie: R_1 i R_2 — odpowiednio promień okładziny wewnętrznej i zewnętrznej ($R_2 > R_1$).

Z zależności (1) wynika, że maksymalna wartość natężenia pola elektrycznego występuje na okładzinie wewnętrznej o promieniu R_1 i jest równa

$$E(R_1) = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (2)$$

W celu znalezienia minimum wyrażenia (2) wyznaczamy pochodną

$$\frac{dE(R_1)}{dR_1} = E'(R_1) = \frac{-U \left(\ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right)}{R_1^2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1} \right)^2} \quad (3)$$

Po przyrównaniu zależności (3) do zera otrzymamy

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = 1 \quad \text{lub} \quad \frac{R_2}{R_1} = e.$$

W celu określenia znaku $E'(R_1)$ w otoczeniu ekstremum przyjmijmy zależność

$$R_1 = k \frac{R_2}{e}, \quad \text{gdzie} \quad k > 0.$$

Wtedy wyrażenie (3) można zapisać w postaci

$$E'(R_1) = \frac{U \ln k}{R_1^2 (1 - \ln k)^2} \quad (4)$$

Z analizy wyrażenia (4) wynika, że $E'(R_1) > 0$ dla $k > 1$, a $E'(R_1) < 0$ dla $0 < k < 1$. Wynika stąd, że dla $k = 1$

$\left(R_1 = \frac{R_2}{e} \right)$ funkcja (2) osiąga minimum.

Dla tak dobranych promieni

$$E_{\max} = E(R_1) = \frac{U}{R_1} \quad (5)$$

Po uwzględnieniu, że dla powietrza $E_{\text{dop}} = 300 \text{ kV/m}$, otrzymujemy

$$R_1 \geq \frac{U}{E_{\text{dop}}} = \frac{15}{300} = 0,05 \text{ m} = 50 \text{ mm}$$

oraz

$$R_2 = R_1 \cdot e = 50 \cdot 2,71 \approx 136 \text{ mm.}$$

Po odłączeniu kondensatora od źródła napięcia na okładzinach pozostaje ładunek o wartości

$$Q = CU \quad (6)$$

Ponieważ dla kondensatora walcowego pojemność

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}},$$

to zaprojektowany powyżej kondensator ma pojemność

$$C = 2\pi\epsilon l \quad (7)$$

Zgodnie z zależnościami (6) i (7) ładunek zgromadzony na okładzinie kondensatora ma wartość

$$Q = 2\pi\epsilon_0 l U \quad (8)$$

Włożenie dielektryka o przenikalności $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ nie spowoduje zmiany ładunku, natomiast zmieni się napięcie na kondensatorze, które wyznaczymy z równania

$$2\pi\epsilon_0 l U = 2\pi\epsilon_0 \epsilon_r l U_1 \quad (9)$$

Zatem

$$U_1 = \frac{U}{\epsilon_r} = \frac{15 \cdot 10^3}{5} = 3 \cdot 10^3 = 3 \text{ kV} \quad (10)$$

Maksymalna wartość natężenia pola będzie w tym przypadku równa

$$E_{1\text{max}} = E(R_1) = \frac{U_1}{R_1} = 60 \text{ kV/m} \quad (11)$$

Analizując otrzymane powyżej zależności stwierdzamy, że wprowadzenie dielektryka w przestrzeń między okładzinami kondensatora — przy ustalonej wartości ładunku zgromadzonego w kondensatorze — powoduje zmniejszenie ϵ_r razy napięcia między okładzinami oraz największej wartości natężenia pola — występującego przy okładzinie wewnętrznej.

Stosunek energii pola elektrycznego w kondensatorze powietrznym do energii pola elektrycznego w kondensatorze z włożonym dielektrykiem wyraża się zależnością

$$n = \frac{\frac{1}{2}CU^2}{\frac{1}{2}C_1U_1^2} = \frac{2\pi\epsilon_0lU^2}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l \frac{U^2}{\epsilon_r^2}} = \epsilon_r.$$

Energia zgromadzona w polu elektrycznym kondensatora zmaleje również ϵ_r razy.

Problem techniczny 5.26

Na terenie osiedla mieszkaniowego zbudowano parking dla samochodów, na którym znajdują się cztery słupy oświetleniowe zlokalizowane w równych odległościach od siebie. Odległość między słupami wynosi 20 m. Dodatkowo na terenie parkingu jest stróżówka, w której znajduje się piec o mocy 3000 W oraz punkt świetlny o mocy 100 W, zasilane napięciem znamionowym 220 V. Odległość stróżówki od pierwszego słupa wynosi 50 m.

Na każdym słupie znajdują się dwie oprawy sodowe o parametrach:

- moc jednej oprawy 400 W,
- współczynnik mocy czynnej 0,85,
- napięcie znamionowe oprawy 220 V.

Parking będzie zasilany z jednego z budynków mieszkalnych kablem miedzianym czterożyłowym o przekroju 4 mm².

Zadania częściowe:

1. Zaproponuj sposób sterowania oświetleniem i lokalizację elementów realizujących to sterowanie, biorąc pod uwagę fakt, że w stróżówce musi być przez całą dobę napięcie.
2. Podaj, w jakiej odległości (w metrach) powinien znajdować się punkt zasilający parking, wiedząc że dopuszczalny spadek napięcia dla opraw wynosi 10%.
3. Oblicz roczną opłatę za energię elektryczną pobieraną przez parking, przy następujących założeniach:
 - 1 kW · h kosztuje 0,18 zł,
 - roczny czas użytkowania oświetlenia zewnętrznego wynosi 3800 h,
 - roczny czas użytkowania oświetlenia i ogrzewania dyżurki wynosi 1500 h.

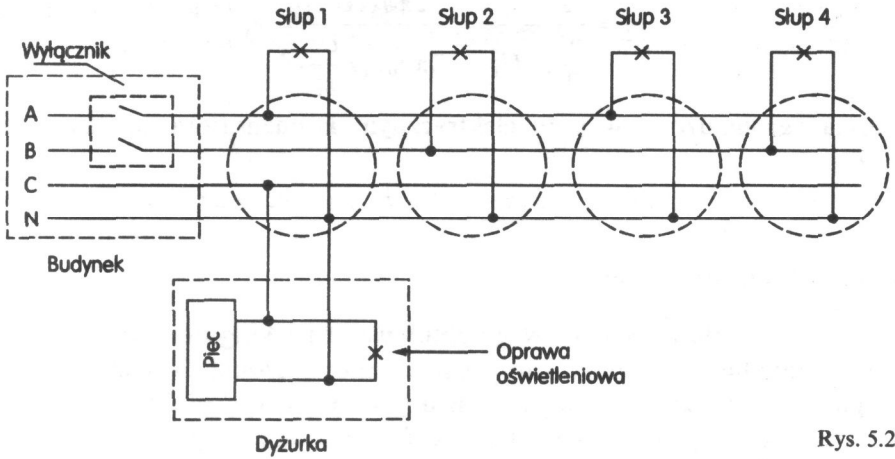
Rozwiązanie

Ad. 1

Wariant 1

Sterowanie oświetleniem znajduje się w budynku, z którego jest zasilany parking. Schemat tego rozwiązania przedstawiono na rys. 5.26a.

a)



Rys. 5.26a

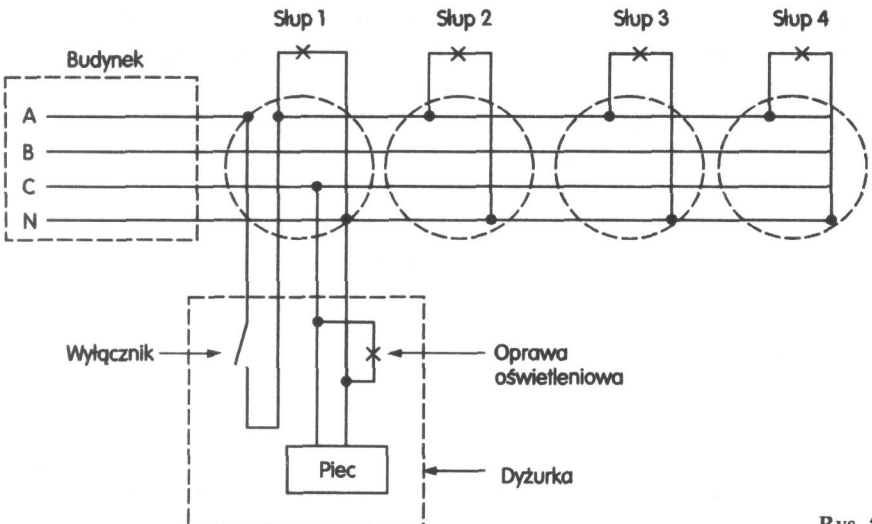
Dwie fazy są wykorzystane do zasilania opraw, a trzecia jest wprowadzona do dyżurki w celu zasilania pieca i oprawy oświetleniowej.

Oprawy podzielono równomiernie na fazy, po 4 oprawy na jedną fazę, inaczej mówiąc po 2 słupy na jedną fazę.

Wariant 2

Sterowanie oświetleniem znajduje się w dyżurce. Wszystkie oprawy są zasilane z jednej fazy. Piec oraz oprawa oświetleniowa są zasilane z innej fazy. Schemat tego rozwiązania przedstawiono na rys. 5.26b.

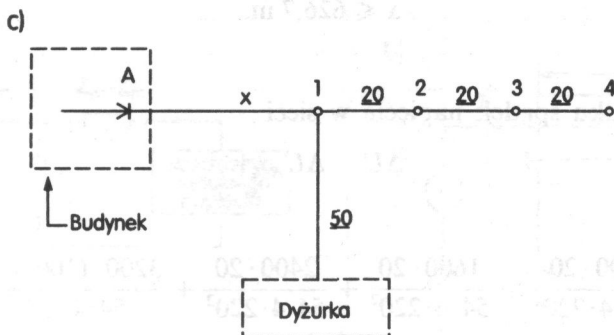
b)



Rys. 5.26b

Ad. 2

Na planie sytuacyjnym (rys. 5.26c) przedstawiono rozmieszczenie odbiorników energii elektrycznej oraz zaznaczono odległości między nimi.



Rys. 5.26c

Warunek świecenia oprawy jest następujący:

$$\Delta U \leq \Delta U_{\text{dop}},$$

gdzie: ΔU — spadek napięcia w istniejącej sieci, ΔU_{dop} — dopuszczalny spadek napięcia umożliwiający świecenie oprawy, wynoszący 10%.

Fazowy spadek napięcia oblicza się z zależności

$$\Delta U_{\%} = \frac{Pl}{\gamma s U_N^2} \cdot 100\%,$$

gdzie: P — moc czynna odbiornika fazowego, kW; l — odległość, m; γ — przewodność miedzi $54 \text{ m}/(\Omega \cdot \text{mm}^2)$; s — przekrój przewodu wynoszący 4 mm^2 ; U_N — fazowe napięcie znamionowe wynoszące 220 V.

Wariant 1

Spadek napięcia w sieci wyznaczamy z zależności

$$\Delta U = \Delta U_{2-4} + \Delta U_{A-2},$$

gdzie:

$$\Delta U_{2-4} = \frac{800 \cdot 40}{54 \cdot 4 \cdot 220^2} \cdot 100 = 0,3,$$

$$\Delta U_{A-2} = \frac{1600 \cdot (20 + x)}{54 \cdot 4 \cdot 220^2} \cdot 100 = 0,3 + 0,015 x.$$

Ponieważ $\Delta U \leq 10\%$, przeto

$$0,6 + 0,015x \leq 10,$$

skąd

$$x \leq 626,7 \text{ m.}$$

Wariant 2

W tym przypadku spadek napięcia w sieci

$$\Delta U = \Delta U_{A-4},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Delta U_{A-4} &= \left[\frac{800 \cdot 20}{54 \cdot 4 \cdot 220^2} + \frac{1600 \cdot 20}{54 \cdot 4 \cdot 220^2} + \frac{2400 \cdot 20}{54 \cdot 4 \cdot 220^2} + \frac{3200 \cdot (100 + x)}{54 \cdot 4 \cdot 220^2} \right] \cdot 100 = \\ &= 3,96 + 0,03x. \end{aligned}$$

Ponieważ $\Delta U \leq 10$, przeto

$$3,96 + 0,03x \leq 10,$$

skąd

$$x \leq 201 \text{ m.}$$

Ad. 3

Energia elektryczna czynna wyraża się zależnością

$$A = PT,$$

gdzie: P — moc szczytowa czynna równa mocy zainstalowanej odbiorników, kW; T — roczny czas użytkowania mocy, h: dla oświetlenia zewnętrznego $T = 3800$ h; dla oświetlenia i ogrzewania dyżurki $T = 1500$ h.

Energia czynna

$$A = 3,2 \cdot 3800 + 3,1 \cdot 1500 = 16810 \text{ kW} \cdot \text{h.}$$

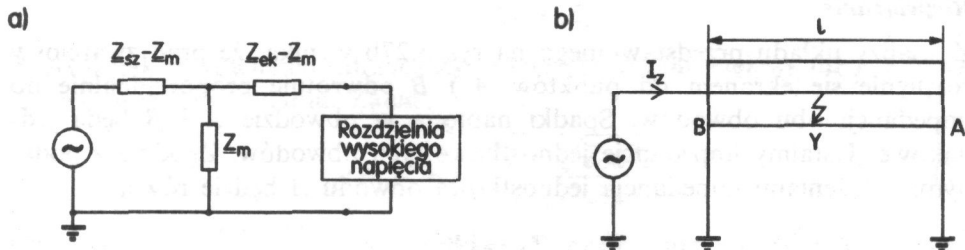
Koszty energii wynoszą

$$16810 \cdot 0,18 = 3025,8 \text{ zł.}$$

Problem techniczny 5.27

Obecnie w energetyce są budowane tory wieloprądowe z izolacją SF_6 , między innymi w celu połączenia transformatora blokowego z rozdzielnią napowietrzną wysokiego napięcia. Są one umieszczone bezpośrednio nad ziemią na wysokości ok. 1 m. Tor każdej z faz jest zbudowany z szyny

przewodzącej prąd oraz ekranu (osłony). Szyna i ekran są wykonane w kształcie rury ze stopu aluminiowego, a przestrzeń między nimi jest wypełniona izolacją SF₆. Schemat zastępczy układu szyna-ekran przedstawiono na rys. 5.27a.



Rys. 5.27a,b

Oznaczenia przyjęte na rysunku:

\underline{Z}_{sz} — impedancja szyny w stosunku do ziemi,

\underline{Z}_{ek} — impedancja ekranu w stosunku do ziemi,

\underline{Z}_m — impedancja wzajemna szyna-ekran.

Zwykle rezystancje szyny i ekranu można pominąć, gdyż są one małe w stosunku do reaktancji. Reaktancje jednostkowe (na 1 m długości szyny lub ekranu) toru o parametrach:

— ekran: średnica zewnętrzna 320 mm, grubość ścianki 9 mm,

— szyna: średnica zewnętrzna 80 mm, grubość ścianki 8 mm,

— odległość od ziemi $h = 1$ m,

— częstotliwość prądu $f = 50$ Hz,

będą odpowiednio równe:

$$X_{sz} = 2,6 \cdot 10^{-4} \Omega/m,$$

$$X_{ek} = 1,7 \cdot 10^{-4} \Omega/m,$$

$$X_m = 1,9 \cdot 10^{-4} \Omega/m.$$

Ze względów bezpieczeństwa obsługi oba końce osłony odcinków ekranu są uziemione (rys. 5.27b).

Ustal, jak długi może być odcinek osłony pomiędzy uziemieniami (punkty A i B), aby w przypadku zwarcia wewnętrznego (między szyną a osłoną w punkcie Y) napięcie dotyku na osłonie (napięcie między osłoną a ziemią) nie przekroczyło 65 V (dopuszczalne napięcie rażenia dla człowieka). Przy wyznaczaniu długości odcinka osłony między uziemieniami uwzględnij fakt, że ekran jest składany z odcinków o długości 12 m. Prąd zwarciaowy $I_z = 25$ kA.

Wskazówka

Na odcinku szynoprzewodu od punktu B do punktu zwarcia Y w schemacie zastępczym przedstawionym na rys. 5.27a można pominąć prąd płynący przez impedancję \underline{Z}_m .

Rozwiązanie

Z analizy układu przedstawionego na rys. 5.27b wynika, że prąd zwarciovowy rozplynie się ekranem od punktów A i B odwrotnie proporcjonalnie do impedancji obu obwodów. Spadki napięcia w obwodzie A i B będą jednakowe. Ustalmy impedancje jednostkowe tych obwodów. Zgodnie z podanymi założeniami impedancja jednostkowa obwodu A będzie równa

$$\underline{Z}_A = jX_{ek} \quad (1)$$

Po zastosowaniu się do powyższych założeń i treści wskazówki możemy dla obwodu B określić impedancję jednostkową

$$\underline{Z}_B = j(X_{sz} + X_{ek} - 2X_m) \quad (2)$$

Ponieważ impedancje \underline{Z}_A i \underline{Z}_B mają tylko część urojoną, przeto w dalszych rozważaniach będziemy posługiwać się tylko ich modułami:

$$Z_A = X_{ek} = 1,7 \cdot 10^{-4} \Omega/m \quad (3)$$

$$Z_B = (X_{sz} + X_{ek} - 2X_m) = 0,5 \cdot 10^{-4} \Omega/m \quad (4)$$

Zatem napięcie dotyku na ekranie w punkcie Y możemy wyrazić zależnością

$$U_d = I_z \frac{Z_A(1-y) \cdot Z_B y}{Z_A(1-y) + Z_B y} \quad (5)$$

gdzie y jest odległością od punktu B do punktu zwarcia Y .

W celu rozwiązania postawionego w niniejszym problemie technicznym zagadnienia, należy poszukać takiego położenia punktu zwarcia Y , w którym napięcie dotyku będzie największe, a następnie zająć się doбором długości odcinka ekranu l między uziemieniami.

W tym celu poszukujemy ekstremum wyrażenia (5) ze względu na y . Pochodna $U'_d(y)$ ma postać

$$U'_d(y) = I_z \frac{Z_A Z_B (1-2y) [Z_A(1-y) + Z_B y] - Z_A Z_B (1-y) \cdot y \cdot (Z_B - Z_A)}{[Z_A(1-y) + Z_B y]^2} \quad (6)$$

Po przyrównaniu pochodnej do zera i po przekształceniach, otrzymujemy następujące równanie kwadratowe

$$(Z_A - Z_B)y^2 - 2Z_A l y + l^2 Z_A = 0 \quad (7)$$

które ma dwa pierwiastki:

$$y_1 = l \cdot \frac{Z_A - \sqrt{Z_A Z_B}}{Z_A - Z_B} \quad (8)$$

$$y_2 = l \cdot \frac{Z_A + \sqrt{Z_A Z_B}}{Z_A - Z_B} \quad (9)$$

Pierwiastek y_2 równania odrzucamy, ponieważ jest on większy niż l , a to nie spełnia warunku zadania. Zatem

$$y = y_1 = l \cdot \frac{Z_A - \sqrt{Z_A Z_B}}{Z_A - Z_B} \quad (10)$$

Z warunków realizacji fizycznej wynika, że ekstremum funkcji $U_d(y)$ wyznacza maksymalną wartość napięcia dotyku na odcinku ekranu o długości l . Wyraża to wzór

$$U_{d\max}(l) = I_z l \sqrt{Z_A Z_B} \cdot \frac{(\sqrt{Z_A Z_B} - Z_B)(Z_A - \sqrt{Z_A Z_B})}{(Z_A - Z_B)^2} \quad (11)$$

Po podstawieniu danych liczbowych

$$U_{d\max}(l) = 0,5255 l \quad (12)$$

Z warunków bezpieczeństwa $U_{d\max}(l) \leq 65$ V. Zatem

$$l \leq \frac{65}{0,5255} = 123,7 \text{ m.}$$

Ponieważ dysponujemy odcinkami toru wieloprądowego po 12 m, przeto między uziemieniami może znajdować się maksymalnie 10 odcinków o łącznej długości 120 m.