XXXVIII OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody II stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

Rozwiązanie zadania 1

Sytuacja I

Belka jest obustronnie utwierdzona. Według wzorów podanych w każdym poradniku, maksymalna wartość momentu zginającego $M_{\max}$ od obciążenia skupionego P, działającego w środku jej rozpiętości, jest równa:

$$M_{\max} = \frac{1}{8} P\, l\,, \tag{1}$$

zaś maksymalne ugięcie

$$f_{\max} = \frac{P\, l^3}{192\, E\, J}\,, \tag{2}$$

E – moduł Younga stali, J – moment bezwładności przekroju belki.

Wobec tego maksymalne naprężenia od zginania belki są równe

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq k\,; \qquad \frac{P\, l}{8\, W} \leq k\,, \tag{3}$$

W – wskaźnik wytrzymałości przekroju belki, a maksymalne ugięcie belki jest równe

$$f_{\max} = \frac{P\, l^3}{192\, E\, J} \leq \frac{l}{200}\,; \qquad f_{\max} = \frac{25\, P\, l^2}{24\, E\, J}\,. \tag{4}$$

Patronem honorowym OWT jest Minister Gospodarki.
Partnerami medialnymi OWT sa:
- Przegląd Techniczny,
- Przegląd Mechaniczny.

Sponsorami XXXVIII OWT sa:
- Grupa Kapitałowa PSE Operator SA,
- Fundacja PGNiG im. Ignacego Łukasiewicza,
- Instytut Mechnizacji Budownictwa i Górnictwa Skalnego,
- Stowarzyszenie Inżynierów i Techników Przemysłu Materiałów Budowlanych.

Sytuacja II

Belka jest swobodnie podparta. Według wzorów podanych w każdym poradniku, maksymalna wartość momentu zginającego $M_{\max}$ od obciążenia skupionego P, działającego w środku jej rozpiętości, jest równa:

$$M_{\max} = \frac{1}{4}\, P\, l\,, \tag{5}$$

zaś maksymalne ugięcie

$$f_{\max} = \frac{P\, l^3}{48\, E\, J}\,. \tag{6}$$

Wobec tego maksymalne naprężenia od zginania belki są równe

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \le k\,; \qquad \frac{P\, l}{4\, W} \le k\,, \tag{7}$$

W – wskaźnik wytrzymałości przekroju belki, a maksymalne ugięcie belki jest równe

$$f_{\max} = \frac{P\, l^3}{48\, E\, J} \le \frac{l}{200}\,; \qquad f_{\max} = \frac{25\, P\, l^2}{6\, E\, J}\,. \tag{8}$$

Z porównania (3) i (7) wynika, że naprężenia od zginania w *Sytuacji II* są dwukrotnie większe niż w *Sytuacji I*. Jeśli więc w dalszym ciągu naprężenia te nie mogą przekroczyć wartości dozwolonej k, to ciężar P w *Sytuacji II* powinien być dwukrotnie zmniejszony.

Z porównania (4) i (8) wynika, że maksymalne ugięcia w *Sytuacji II* są czterokrotnie większe niż w *Sytuacji I*. Jeśli więc w dalszym ciągu ugięcie to nie może przekroczyć dozwolonej wartości $f_{\max} = l/200$, to ciężar P w *Sytuacja II* powinien być czterokrotnie zmniejszony.

Rację więc miał bardziej doświadczony inżynier – ciężar powinien być zredukowany i to czterokrotnie, aby zachować oba pierwotne warunki, dotyczące nieprzekraczalności dozwolonych wartości naprężeń od zginania belki oraz jej maksymalnego ugięcia.

Rozwiązanie zadania 2

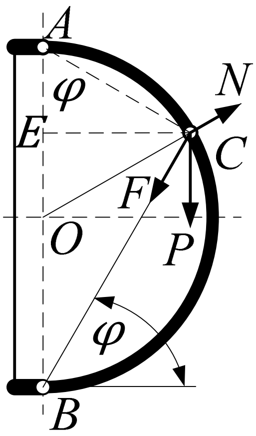
Rysunek 2 przedstawia rozkład sił działających na ciężarek:

F – siła związana z rozciągnięciem gumowej linki,

P – ciężar,

N' – siła odziaływania prowadnicy na ciężarek; w tym kierunku działa również nie zaznaczona na rysunku siła odśrodkowa.

Oznaczając odcinek $AE = h$ oraz $BC = d$; $\angle OCB = 90° - \varphi$; $\angle BCP = 90° - \varphi$; $\angle ECO = \varphi$.
Warunek równości energii w punktach A i C: energia potencjalna w punkcie A w stosunku do punktu C + energia sprężystości linki w punkcie A = energia kinetyczna ciężarka w punkcie C + energia sprężystości linki w punkcie C



Rys.2

$$P\,h + \frac{k\,(2\,r)^2}{2} = \frac{P\,v^2}{2\,g} + \frac{k\,d^2}{2}\,,$$

$$d = 2\,r\,\sin\varphi\,,$$

$$h = 2\,r\,\cos^2\varphi\,,$$

$$v^2 = 4\,g\,r\,\cos^2\varphi\left(1 + \frac{k\,r}{P}\right)\,.$$

Suma rzutów dynamicznego układu sił w punkcie C na kierunek $O - C$ z uwzględnieniem siły odśrodkowej:

$$F\,\sin\varphi + P\,\cos(180 - 2\,\varphi) - N' - \frac{P\,v^2}{g\,r} = 0\,,$$

$$F = k\,d = k\,2\,r\,\sin\varphi\,,$$

$$\begin{aligned} N' &= -\frac{P}{g\,r}\,4\,g\,r\,\cos^2\varphi\left(1 + \frac{k\,r}{P}\right) + k\,2\,r\,\sin^2\varphi - P\,\cos(2\,\varphi) = \\ &= -(2\,P + k\,r) - 3\,(P + k\,r)\,\cos(2\,\varphi)\,, \end{aligned}$$

stąd siła oddziaływania ciężarka na prowadnicę wynosi:

$$N = -N' = 2\,P + k\,r + 3\,(P + k\,r)\,\cos(2\,\varphi)\,,$$

$$N = 2 \cdot 20 + 30 \cdot 1 + 3 \cdot (20 + 30 \cdot 1) \cdot \cos(100^\circ = 43,9\ \mathrm{N}.$$

Odp. Nacisk ciężarka na prowadnicę ma wartość $43,9$ N.

Rozwiązanie zadania 3

Osady na powierzchni wymiany ciepła zwiększają opór przenikania ciepła między spalinami a podgrzewaną wodą, lub – inaczej mówiąc – zmniejszają współczynnik przenikania, który jest odwrotnością oporu cieplnego.

Ponieważ strumień przekazywanego ciepła (moc cieplna pieca) ma być zachowany, wraz z narastaniem osadów musi zwiększać się średnia różnica temperatury między czynnikami wymieniającymi ciepło, zgodnie ze wzorem

$$\dot{Q} = A\, k\, \Delta t_{sr} = A \frac{1}{R} \Delta t_{sr}\,, \tag{1}$$

gdzie A jest powierzchnią wymiany ciepła (nie ulega zmianie).

Opór przenikania bez osadów (dla płaskich przegród) wyznacza się ze wzoru:

$$R_0 = \frac{1}{\alpha_w} + \frac{\delta_z}{\lambda_z} + \frac{1}{\alpha_{sp}} = \frac{1}{k_0}\,. \tag{2}$$

Natomiast z osadami:

$$R_{os} = \frac{1}{\alpha_w} + \frac{\delta_k}{\lambda_k} + \frac{\delta_z}{\lambda_z} + \frac{\delta_s}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha_{sp}} = \frac{1}{k_{os}}\,. \tag{3}$$

Oznaczenia: λ – przewodność cieplna, δ – grubość warstwy; indeksy: k – kamień kotłowy, z – ścianka żeliwna, s – sadza, sp – spaliny, os – wielkość z uwzględnieniem osadów.

Z braku szczegółowych informacji o konstrukcji pieca, jako wymiennika ciepła, należy przyjąć, że średnia różnica temperatury między spalinami a wodą jest równa różnicy między średnimi wartościami temperatury tych czynników w obrębie pieca:

$$\begin{aligned} t_{sr-w} &= \frac{t_{1w} + t_{2w}}{2} = \frac{20 + 60}{2} = 40^\circ\mathrm{C} \\ t_{sr-sp} &= \frac{t_{1sp} + t_{2sp}}{2} = \frac{1200 + 150}{2} = 675^\circ\mathrm{C} \end{aligned}$$

Podstawiając dane do równania (2) otrzymuje się wartość jednostkowego (na jednostkę powierzchni) oporu cieplnego nowego pieca:

$$R_0 = 0,0234\ \mathrm{K\,m^2/W}.$$

A ze wzoru (1) jednostkowy strumień ciepła

$$q_0 = \frac{Q_0}{A} = \frac{1}{R_0} \left(t_{sr-sp} - t_{sr-w}\right) = \frac{675 - 40}{0,0234} = 27137 \text{ W/m}^2 .$$

Opór jednostkowy ściany z osadami (ze wzoru (3)):

$$R_{os} = 0,0279 \text{ K m}^2/\text{W}.$$

Aby przy zwiększonych oporach cieplnych uzyskać taki sam efekt (przyrost temperatury wody) konieczne jest zwiększenie różnicy temperatury między czynnikami

$$q_{os} = q_0 = \frac{1}{R_{os}} \left(t_{sr-sp-os} - t_{sr-w}\right) .$$

Średnia temperatura spalin dla pieca z osadami:

$$t_{sr-sp-os} = q_0 \, R_{os} + t_{sr-w} = 27137 \cdot 0,0279 + 40 = 797,1°\text{C} .$$

Temperatura końcowa spalin:

$$t_{2sp-os} = 2\, t_{sr-sp-os} - t_{1sp} = 394,2°\text{C} .$$

W uproszczeniu jako miarę sprawności (efektywności) pieca można przyjąć stosunek spadku temperatury spalin do różnicy między temperaturą spalania $\left(t_{1sp}\right)$ a temperaturą otoczenia. Dla temperatury otoczenia 20°C (tak, jak temperatura początkowa wody) sprawność pieca nowego wynosi:

$$\eta_0 = \frac{1200 - 150}{1200 - 20} = 0,89 .$$

Natomiast pieca z osadami

$$\eta_{os} = \frac{1200 - 394,2}{1200 - 20} = 0,68 .$$

Odp. Zmiana sprawności jest znacząca. Szacunki są wszakże bardzo przybliżone.

Rozwiązanie zadania z optymalizacji

Oznaczenie : x – liczba podzespołów 1, y – liczba podzespołów 2.
Funkcja celu (maksymalny zysk):

$$F = 30\,x + 45\,y\;.$$

Ograniczenia:

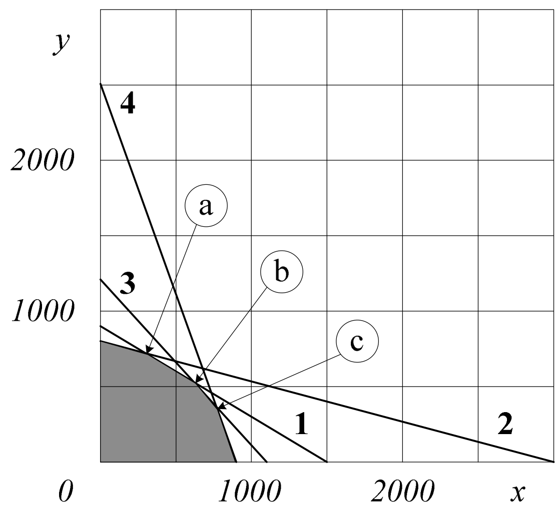
$$3\,x + 5\,y \le 4500 \qquad \Longrightarrow \qquad y \le -\frac{3}{5}\,x + 900\,, \tag{1}$$

$$4\,x + 15\,y \le 12000 \qquad \Longrightarrow \qquad y \le -\frac{4}{15}\,x + 800\,, \tag{2}$$

$$12\,x + 11\,y \le 13200 \qquad \Longrightarrow \qquad y \le -\frac{12}{11}\,x + 1200 \tag{3}$$

$$25\,x + 9\,y \le 22500 \qquad \Longrightarrow \qquad y \le -\frac{25}{9}\,x + 2500\;. \tag{4}$$

Graficznie znajdujemy rozwiązanie układu nierówności (1)÷(4). Szary obszar odpowiada spełnieniu wszystkich nierówności. Oczywiście liczby wyprodukowanych podzespołów muszą być dodatnie oraz całkowite, stąd w uzyskanych dalej rozwiązaniach pomija się część ułamkową a wszystkie zaokrąglenia wykonuje się „w dół” (w przeciwnym wypadku nastąpiłoby przekroczenie zapasu magazynowego).



Następnie wyznaczamy współrzędne charakterystycznych punktów („a”, „b”, „c”):

Punkt „a” (przecięcie prostej 1 i 2) otrzymujemy przyrównując do siebie prawe strony nierówności:

$$y \leq -\frac{3}{5}x + 900\,,$$

$$y \leq -\frac{4}{15}x + 800\,,$$

stąd
$$-\frac{3}{5}x + 900 = -\frac{4}{15}x + 800 \qquad \longrightarrow \qquad x = 300\,,$$

oraz y z dowolnej powyższej nierówności: $y = 720$.

Punkt „b” (przecięcie prostej 1 i 3) otrzymujemy przyrównując do siebie prawe strony nierówności:

$$y \leq -\frac{3}{5}x + 900\,,$$

$$y \leq -\frac{12}{11}x + 1200\,,$$

stąd
$$-\frac{3}{5}x + 900 = -\frac{12}{11}x + 1200 \qquad \longrightarrow \qquad x = 611\,,$$

oraz y z dowolnej powyższej nierówności: $y = 533$.

Punkt „c” (przecięcie prostej 3 i 4) otrzymujemy przyrównując do siebie prawe strony nierówności:

$$y \leq -\frac{12}{11}x + 1200\,,$$

$$y \leq -\frac{25}{9}x + 2500\,,$$

stąd
$$-\frac{12}{11}x + 1200 = -\frac{25}{9}x + 2500 \qquad \longrightarrow \qquad x = 770\,,$$

oraz y z dowolnej powyższej nierówności: $y = 359$.

Zyski w poszczególnych punktach wynoszą:

Punkt „a”: $F(„a”) = 30 \cdot 300 + 45 \cdot 720 = 41400$ zł.

Punkt „b”: $F(„b”) = 30 \cdot 611 + 45 \cdot 533 = 42315$ zł.

Punkt „c”: $F(„c”) = 30 \cdot 770 + 15 \cdot 359 = 28485$ zł.

Maksymalnemu zyskowi odpowiada punkt „b”

Odp. Wyprodukowano 611 podzespołów 1 i 533 podzespołów 2. Zysk wyniósł 42315 zł .

Rozwiązanie zadania z zastosowania informatyki

Program kolejno obejmuje:

- Wybór nośnika danych,
- Wprowadzenie danych,
- Sortowanie (konieczne przy wyznaczaniu mediany),
- Wyznaczenie wartości maksymalnej, minimalnej i średniej,
- Obliczenie odchylenia standardowego,
- Obliczenie mediany,
- Wydruk wyników.

<u>Przykład programu w języku Fortran:</u>

```
    Real,Dimension(100):: Tab
    Real a,xmax,xmin,xsr,sigma,med,s
    Integer N,k
    Character(21):: dane
    Character(1):: w
!Wybór sposobu wprowadzania danych
    Write(*,*)'Nacisnąć "k" jeżeli dane wprowadzane są z klawiatury'
    Read(*,*) w
    If (w.EQ.'k') then
!Wprowadzanie danych z klawiatury
       Write(*,*) 'Liczba elementów zbioru'
       Read(*,*) N
       Write(*,*) 'Wprowadź kolejne elementy zbioru'
       Do i=1,N
          Write(*,*) i
          Read(*,*) Tab(i)
       end do
    else
!Wprowadzanie danych z pliku
       Open (1,file='d:\textbackslash dane1.txt')
       Read(1,*) N
       Read(1,*) (Tab(i),i=1,N)
    end if
```

```
!Sortowanie
    100 k=0
    Do i=1,N-1
       if (Tab(i).GT.Tab(i+1)) then
          a=Tab(i)
          Tab(i)=Tab(i+1)
          Tab(i+1)=a
          k=1
       end if
    end do
    if (k.EQ.1) then
       goto 100
    end if
    xmin=Tab(1)
    xmax=Tab(N)
!Wartość średnia
    s=0
    Do i=1,N
       s=s+Tab(i)
    end do
    xsr=s/N
!Odchylenie standardowe
    s=0
    Do i=1,N
       s=s+(tab(i)-xsr)*(tab(i)-xsr)
    end do
    sigma=(s/N)**0.5
!Mediana
    If (mod(N,2).EQ.0) then
       med=(Tab(N/2)+Tab(N/2+1))/2
    else
       med=Tab((N-1)/2+1)
    end if
    Open (2,file='d:\wyniki.txt')
    Write (2,200)xmax,xmin,xsr
    Write (2,300)sigma,med
200 Format ('xmax=',F8.3,'  xmax=',F8.3,'  xsr=',F8.3)
300 Format ('sigma=',F8.3,'  mediana=',F8.3)
    end
```