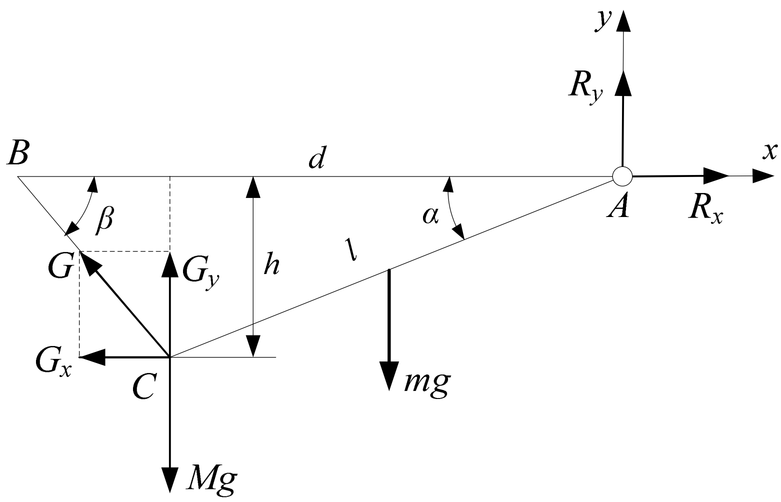
XLII OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody III stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

Rozwiązanie zadania 1



Rys.1.

Rysunek 1 przedstawia wszystkie siły występujące w układzie oraz ułatwiające dalsze obliczenia kąty α i β.
1. Obliczenia rozpoczynamy od określenia miar tych kątów:

$$\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{1,2}{3} = 0,4 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 23,58^\circ ,$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{h}{d - l\cos\alpha} = \frac{1,2}{4 - 3\cdot\cos 23,58} = 0,96 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 43,82^\circ .$$

Suma momentów sił względem punktu A równa jest zero:

$$G_x\, l \sin\alpha + G_y\, l\cos\alpha - (M + 0,5\, m)\, g\, l\cos\alpha = 0\,, \tag{1}$$

Patronem honorowym OWT jest Minister Gospodarki.
Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.

$$G_x = G \cos \beta \qquad ; \qquad G_y = G \sin \beta \,,$$

$$G\,(\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha) = (M + 0,5\,m)\,g \cos \alpha \,,$$

$$G \sin (\alpha + \beta) = (M + 0,5\,m)\,g \cos \alpha \,,$$

$$\begin{aligned} G &= (M + 0,5\,m)\,g\,\frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} = \\ &= (150 + 0,5 \cdot 100) \cdot 9,81 \cdot \frac{\cos 23,68}{\sin (23,58 + 43,82)} = 1947,79 \text{ N}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$G_x = G \cos \beta = 1947,79 \cdot \cos 43,82 = 1405,36 \text{ N},$$

$$G_y = G \sin \beta = 1947,79 \cdot \cos 43,82 = 1348,65 \text{ N}.$$

Suma rzutów sił na oś x:

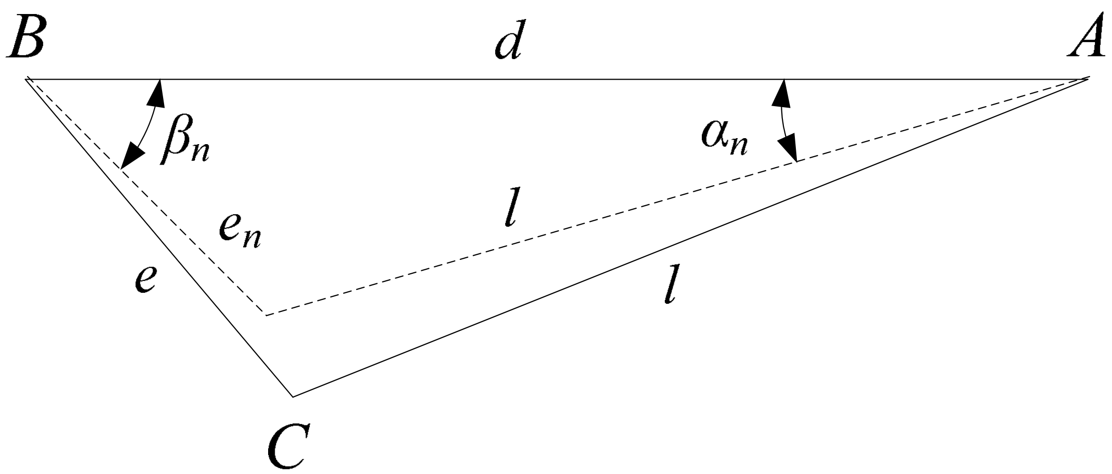
$$R_x - G_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_x = G_x = 1405,36 \text{ N}. \tag{3}$$

Suma rzutów sił na oś y

$$G_y + R_y - (M + m)\,g = 0 \,,$$

$$R_y = (M + m)\,g - G_y = (150 + 100) \cdot 9,81 - 1348,65 = 1103,85 \text{ N}. \tag{4}$$

2. Oznaczając długość linki pomiędzy punktami B i C (rys.2) jako e obliczamy jej wartość:



Rys.2.

$$e = \frac{h}{\sin\ \beta} = \frac{1,2}{\sin\ 54,98} = 1,733\ \mathrm{m}.$$

Po założeniu dodatkowej masy odległość ta zmaleje:

$$e_n = e - dh = 1,733 - 0,11 = 1,623\ \mathrm{m}.$$

Obliczamy kąty α_n i β_n w trójkącie o bokach d, l, e_n wykorzystując twierdzenie cosinusów:

$$\cos\ \alpha_n = \frac{d^2 + l^2 - e_n^2}{2\,d\,l} = \frac{4^2 + 3^2 - 1,623^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = 0,9319 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_n = 21,27^\circ\ ,$$

$$\cos\ \beta_n = \frac{d^2 + e_n^2 - l^2}{2\,d\,e_n} = \frac{4^2 + 1,623^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 1,623} = 0,7420 \qquad \Rightarrow \qquad \beta_n = 42,1^\circ\ .$$

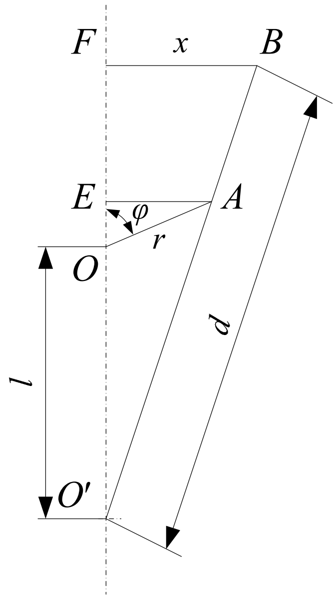
Stosując równanie momentów (1) w zmodyfikowanej postaci ostatecznie otrzymujemy:

$$G + m_d\, g = (M + 0,5\, m)\, g\, \frac{\cos\ \alpha_n}{\sin\left(\alpha_n + \beta_n\right)}\ ,$$

$$\begin{aligned} m_d &= (M + 0,5\, m)\, \frac{\cos\ \alpha_n}{\sin\left(\alpha_n + \beta_n\right)} - \frac{G}{g} = \\ &= (150 + 0,5 \cdot 100) \cdot \frac{\cos\ 21,27}{\sin\,(21,27 + 42,1)} - \frac{1947,79}{9,81} = 9,95\ \mathrm{kg}. \end{aligned}$$

<u>Odpowiedź:</u> $G = 1947,79$ N, $R_x = 1405,36$ N, $R_y = 1103,85$ N, $m_d = 9,95$ kg.

Rozwiązanie zadania 2



Rys.1

Równanie ruchu suwaka wyznaczamy wykorzystując schemat na rysunku 1. Porównując trójkąty $FO'B$ oraz $EO'A$ mamy:

$$\frac{FB}{EA} = \frac{O'B}{O'A}\,,$$

ale $FB = x$, $OA = r$, $O'B = d$, $EA = OA\,\sin\varphi = r\,\sin\varphi$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta $OO'A$

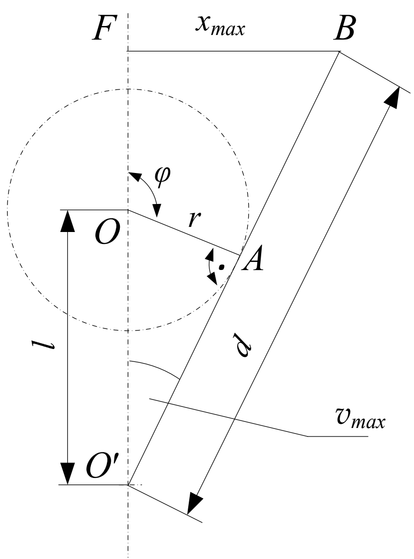
$$O'A = \sqrt{r^2 + l^2 + 2\,r\,l\,\cos\varphi}\,,$$

$$\varphi = \omega\,t = 2\,\pi\,n\,t\,.$$

Równanie ruchu suwaka

$$x = \frac{r\,d\,\sin\left(2\,\pi\,n\,t\right)}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2\,r\,l\,\cos\left(2\,\pi\,n\,t\right)}}\,.$$

Maksymalne wysunięcie suwaka występuje wtedy, gdy wahacz jarzma $O'B$ jest styczny do okręgu zakreślanego przez punkt A korby (rys.2).



Rys.2

Z porównania trójkątów $FO'B$ i $OO'A$ otrzymujemy:

$$\frac{FB}{O'B} = \frac{OA}{OO'}\,,$$

a więc

$$\frac{x_{max}}{d} = \frac{r}{l}\,,$$

$$x_{max} = \frac{r\,d}{l} = \frac{0,24 \cdot 1,2}{0,4} = 0,72\,\mathrm{m}.$$

Położeniu temu odpowiada maksymalne odchylenie wahacza o kąt v_{max}

$$\sin\,v_{max} = \frac{r}{l} = \frac{0,24}{0,4} = 0,6 \quad\Rightarrow\quad v_{max} = 36,87^\circ\,.$$

Suwak uzyskuje prędkość maksymalną gdy korba przechodzi linię pionu poniżej osi obrotu. Pozioma prędkość punktu A korby wynosi wtedy:

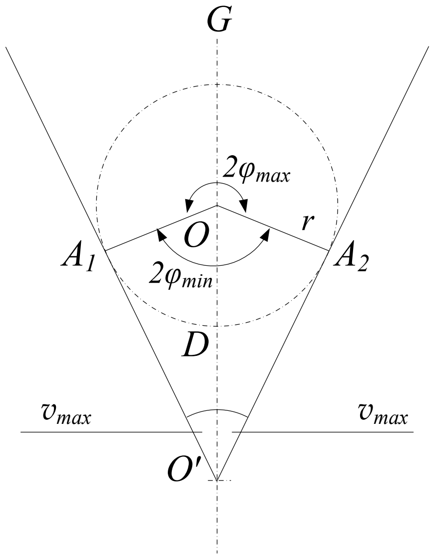
$$v_A = 2\,\pi\,n\,r\,,$$

a punkt A odległy jest od osi O' o wartość $l - r$ stąd proporcja:

$$\frac{v_{suwaka}}{v_A} = \frac{d}{l - r} \,,$$

$$v_{suwaka} = v_A \frac{d}{(l-r)} = 2\,\pi\,n\,r\,\frac{d}{(l-r)} = 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 0,24 \cdot \frac{1,2}{0,4 - 0,24} = 11,3\;\mathrm{m/s}\,.$$

Średnią prędkość suwu wyznaczamy jako stosunek drogi równej $2\,x_{max}$ do czasu jej przebywania. W przypadku drogi „w prawo” czas ten odpowiada obrotowi korby A_1GA_2 o kąt $2\,\varphi_{max}$, a dla drogi „w lewo” obrotowi korby A_2DA_1 o kąt $2\,\varphi_{min}$ (rys. 3).



Rys.3

Z. trójkąta $O'OA$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{max} &= 180 - \Big(90 - v_{max}\Big) = \\
&= 90 + v_{max} = \\
&= 90 + 36,87 = 126,87^{\circ}\,, \\
\varphi_{min} &= 90 - v_{max} = \\
&= 90 - 36,87 = 53,13^{\circ}\,,
\end{aligned}$$

$$v_l = \frac{2\,x_{max}}{2\,\varphi_{min}}\,2\,\pi\,n\,,$$

$$v_p = \frac{2\,x_{max}}{2\,\varphi_{max}}\,2\,\pi\,n\,,$$

$$\frac{v_p}{v_l} = \frac{\varphi_{min}}{v_{max}} = \frac{53,13}{126,87} = 0,42\,.$$

<u>Odpowiedź:</u> Maksymalne wychylenie $x_{max} = 0,72$ m, maksymalna prędkość $v_{suwaka} = 11,3$ m/s, stosunek średnich prędkości $v_p/v_l = 0,42$.

Rozwiązanie zadania 3

Pytanie 1

Oznaczmy przez a_1 oraz a_2 boki kwadratowego przekroju słupa, odpowiednio ze słabszego betonu i mocniejszego betonu. W obu przypadkach wysokość słupa jest taka samai równa h. Odpowiednio objętość słupa oznaczmy odpowiednio przez V_1 i V_2.

Mamy zatem:

$$V_1 = a_1^2\, h \qquad \text{oraz} \qquad V_2 = a_2^2\, h\,. \tag{1}$$

Maksymalne naprężenia od ściskania słupa siła osiową P są równe

$$\sigma_1 = \frac{P}{a_1^2} = 30 \qquad \text{oraz} \qquad \sigma_2 = \frac{P}{a_2^2} = 70\,. \tag{2}$$

Z (2) wynika, że

$$a_1 = \sqrt{\frac{P}{30}} \quad \text{oraz} \quad a_2 = \sqrt{\frac{P}{70}} \quad \text{czyli} \quad a_1 = 0,1826\,\sqrt{P} \quad \text{oraz} \quad a_2 = 0,1195\,\sqrt{P}\,. \tag{3}$$

Z (3) wynika:

$$\frac{a_1}{a_2} = 1,5280 \quad \text{czyli} \quad a_1 = 1,5280\, a_2 \quad \text{lub} \quad a_2 = 0,6544\, a_1\,. \tag{4}$$

Z (4) wynika, że kwadratowe przekroje słupa A_1 ze słabszego betonu i A_2 z mocniejszego betonu są równe:

$$A_1 = 2,3348\, A_2 \quad \text{lub} \quad A_2 = 0,4282\, A_1\,. \tag{5}$$

Oszczędności materiałowe z tytułu użycia mocniejszego betonu są więc ewidentne. Pozostaje zanalizowanie kosztów.

Oznaczmy koszty jednostkowe słabszego betonu przez k_1, a betonu mocniejszego przez k_2. Sumaryczne koszty słupa, K_1 i K_2, będą równe (przy uwzględnieniu informacji podanych w treści zadania):

$$\begin{aligned} K_1 &= a_1^2\, h\, k_1 \qquad \text{oraz} \\ K_2 &= a_2^2\, h\, k_2 = \left(0,6544\, a_1\right)^2\, h \cdot 1,30\, k_1 = 0.5567\, a_1^2\, h\, k_1\,, \end{aligned} \tag{6}$$

czyli:

$$K_2 = 0,5567\ K_1\ . \tag{7}$$

Zatem użycie mocniejszego betonu jest opłacalne mimo, iż jego jednostkowa cena jest wyższa od betonu słabszego.

Pytanie 2

Skrócenie $\Delta\, h$ słupa można, uwzględniając prawo Hooke'a, wyrazić za pomocą wzoru:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\, h}{h} = \frac{\sigma}{E}\ , \tag{8}$$

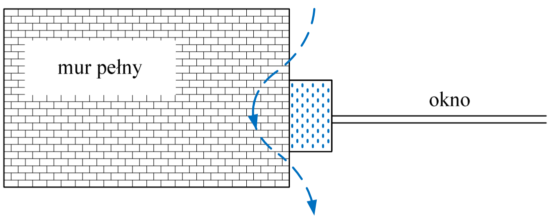
w którym E jest modułem Younga materiału (betonu).

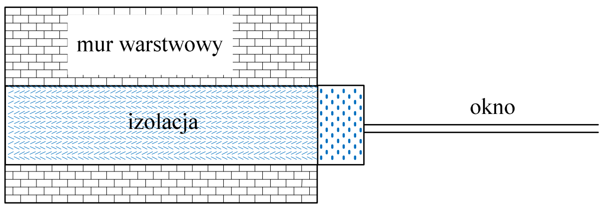
Zatem skrócenie słupa z mocniejszego betonu będzie większe od skrócenia słupa pod tą samą siłą P. Wynika to z mniejszego poprzecznego przekroju słupa wykonanego z mocniejszego betonu.

Przykładowe rozwiązanie problemu technicznego

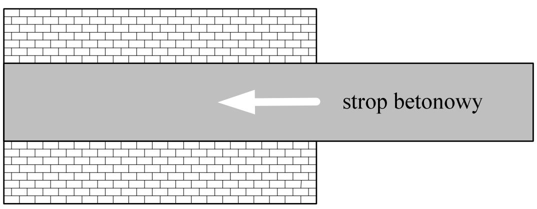
Przykłady mostków cieplnych i sposoby (wybrane) poprawy ich charakterystyk cieplnych. Strzałki pokazują drogi zwiększonego przepływu ciepła.

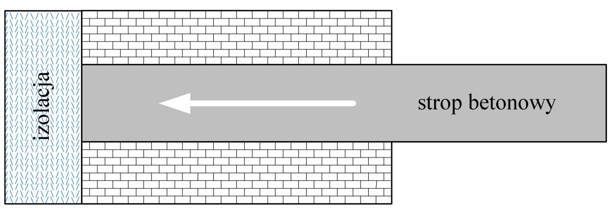
Otwory okienne (także drzwi):



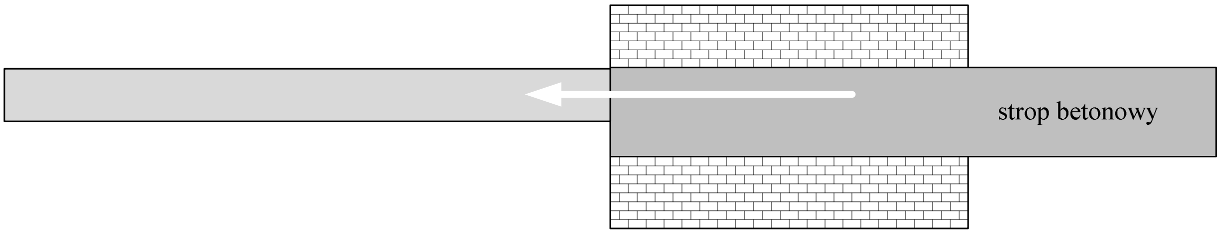


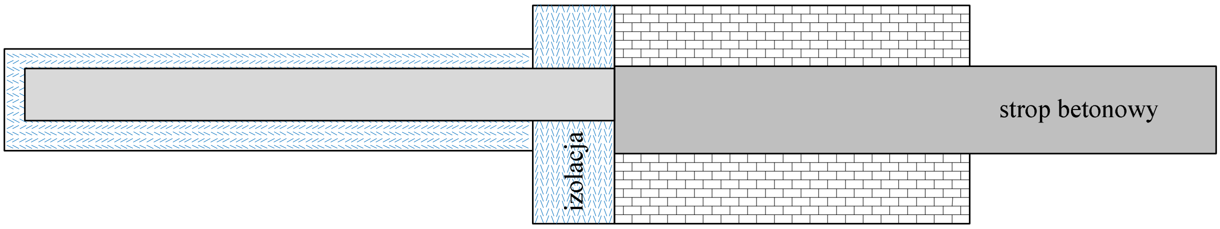
Ściana – strop





Balkony





Inne mostki cieplne:
Naroże ściany zewnętrznej, połączenie ściany zewnętrznej i wewnętrznej, fundamenty, podłoga na gruncie, słup żelbetowy w ścianie.