XLII OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody II stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

Rozwiązanie zadania 1

Dla zadanej wartości temperatury zewnętrznej powierzchni suszarki, T_{dop}, temperatury otoczenia oraz informacji o mechanizmach wymiany ciepła z tej powierzchni, można wyznaczyć gęstość strumienia ciepła przenikającego przez ściankę suszarki:

$$q = \alpha_0 \left(T_{dop} - T_0\right) + \sigma \left(T_{dop}^4 - T_0^4\right) ,$$

$$q = 10 \cdot (40 - 25) + 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \left(313^4 - 298^4\right) = 247,1 \text{ W/m}^2 .$$

Na wewnętrznej powierzchni ścianki suszarki strumień ciepła o tej samej wartości składa się także z części radiacyjnej oraz konwekcyjnej. Część konwekcyjna jest równa:

$$q_\alpha = q - q_r = 247,1 - 100 = 147,1 \text{ W/m}^2 .$$

Biorąc pod uwagę wielkość składowej konwekcyjnej (przejmowanie ciepła) można wyznaczyć temperaturę wewnętrznej powierzchni ścianki:

$$q_\alpha = \alpha_w \left(T_w - T_{w-sc}\right) ,$$

$$T_{w-sc} = T_w - \frac{q_\alpha}{\alpha_w} ,$$

$$T_{w-sc} = 300 - \frac{147,1}{30} = 295,1^\circ\text{C}.$$

Patronem honorowym OWT jest Minister Gospodarki.
Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.

Strumień ciepła przewodzonego przez ściankę kompozytową opisuje równanie:

$$q = \frac{T_{w-sc} - T_{dop}}{\dfrac{d_s}{\lambda_s} + \dfrac{d_{iz}}{\lambda_{iz}} + \dfrac{d_s}{\lambda_s}} \, .$$

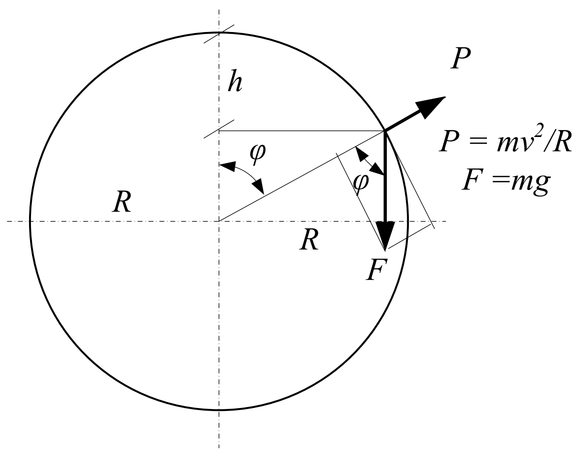
Z tego grubość izolacji:

$$d_{iz} = \lambda_{iz} \left(\frac{T_{w-sc} - T_{dop}}{q} - \frac{2\, d_s}{\lambda_s} \right) ,$$

$$d_{iz} = 0,05 \cdot \left(\frac{295,1 - 40}{247,1} - \frac{2 \cdot 0,001}{15} \right) = 0,0516 \text{ m.}$$

Odpowiedź: Izolacja powinna mieć grubość minimum $51,6$ mm.
Komentarz: Biorąc pod uwagę przewodność cieplną materiału blachy w porównaniu z przewodnością cieplną izolacji, a także grubość blachy, w analizie można pominąć opór cieplny blachy.

Rozwiązanie zadania 2



Ześlizgujący się obiekt nabiera prędkości pod wpływem składowej siły ciążenia F stycznej do okręgu. Zgodnie z zasadą zachowania energii:

$$m\, g\, h = \frac{m\, v^2}{2} \, . \tag{1}$$

Ruch po okręgu wymuszany jest przez prostopadłą składową siły ciążenia – siłę nacisku. Ruch po okręgu powoduje powstanie składowej siły bezwładności P wynoszącej:

$$P = \frac{m\,v^2}{R}\,, \tag{2}$$

i skierowanej na zewnątrz (rysunek). W miarę wzrostu kąta φ maleje siła nacisku, a rośnie prędkość v i stąd składowa odśrodkowa siły bezwładności P.

W momencie, kiedy odśrodkowa siła bezwładności zrównoważy siłę nacisku obiekt „odrywa się” od powierzchni kuli i kontynuuje ruch swobodny z prędkością początkową równą prędkości w chwili oderwania.

Siła nacisku:

$$N = m\,g\,\cos\varphi\,. \tag{3}$$

Warunek równowagi:

$$m\,g\,\cos\varphi = \frac{m\,v^2}{R}\,. \tag{4}$$

Dodatkowo z rysunku wynika związek:

$$h = R\,(1-\cos\varphi)\,. \tag{5}$$

Wykorzystując równania (1), (4) i (5) otrzymamy:

$$\cos\varphi = \frac{2\,h}{R}\,,$$

$$h = \frac{R}{3} \qquad \Rightarrow \qquad h = 0,67\ \mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\varphi = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\varphi = 0,745\,,$$

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{\frac{2}{3}\,g\,R} = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot 9,81\cdot 2} = 3,62\ \mathrm{m/s}\,,$$

składowe prędkości:
pozioma $v_s = v\,\cos\varphi = 2,41$ m/s,
pionowa $v_t = v\,\sin\varphi = 2,7$ m/s.

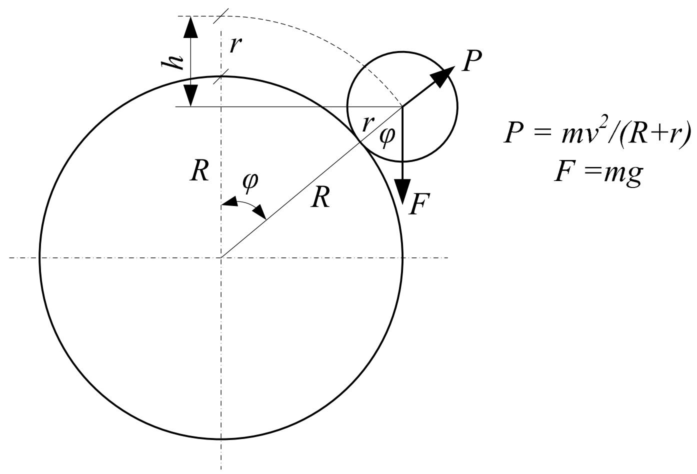
Ruch pionowy jest ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową v_t dla którego zaś ruchu można wyznaczyć z równania:

$$\frac{g\,t^2}{2} + v_t\,t - (H + 2\,R - h) = 0\,,$$

$$4,9\cdot t^2 + 2,7\cdot t - (50 + 4 - 0,67) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 3\ \mathrm{s},$$

poszukiwana odległość wyniesie:

$$od = v_s\,t + R\,\sin\varphi = 8,7\ \mathrm{m}.$$



Staczająca się kula nabiera prędkości zgodnie z zasadą zachowania energii:

$$m\,g\,h = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{I\,\omega^2}{2}\,, \tag{6}$$

w której I jest momentem bezwładności dla kuli i wynosi:

$$I = \frac{2}{5}\,m\,r^2\,,$$

a prędkość kątowa ω związana jest z prędkością liniową środka kuli zależnością:

$$\omega = \frac{v}{r}\,,$$

stąd:

$$m\,g\,h = 0,7\,m\,v^2\,. \tag{7}$$

Prostopadła składowa siły bezwładności wynosi w tym wypadku:

$$P = \frac{m\,v^2}{R+r}\,. \tag{8}$$

Dalsze rozumowanie jest identyczne jak w pierwszej części zadania..
Siła nacisku:

$$N = m\,g\,\cos\,\varphi\,. \tag{9}$$

Warunek równowagi:

$$m\,g\,\cos\,\varphi = \frac{m\,v^2}{R+r}\,. \tag{10}$$

Dodatkowo z rysunku wynika związek:

$$h = (R + r)\,(1 - \cos\,\varphi)\,. \tag{11}$$

Wykorzystując równania (7), (10) i (11) otrzymamy:

$$\cos\,\varphi = \frac{h}{0,7\,(R + r)}\,,$$

$$h = \frac{7}{17}\,(R + r) \qquad \Rightarrow \qquad h = 0,93\,\mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\,\varphi = 0,59 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\,\varphi = 0,807\,,$$

$$v = \sqrt{\frac{g\,h}{0,7}} = \sqrt{\frac{10}{17}\,g\,(R + r)} = \sqrt{\frac{10}{17}\cdot 9,81 \cdot (2 + 0,25)} = 3,6\,\mathrm{m/s}\,,$$

składowe prędkości:
pozioma $v_s = v\,\cos\,\varphi = 2,12\,\mathrm{m/s}$,
pionowa $v_t = v\,\sin\,\varphi = 2,9\,\mathrm{m/s}$.

Ruch pionowy jest ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową v_t dla którego zas ruchu można wyznaczyć z równania:

$$\frac{g\,t^2}{2} + v_t\,t - (H + 2\,R - h) = 0\,,$$

$$4,9 \cdot t^2 + 2,9 \cdot t - (50 + 4 - 0,93) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 3\,\mathrm{s},$$

a poszukiwana odległość wyniesie:

$$od = v_s\,t + (R + r)\,\sin\,\varphi = 8,5\,\mathrm{m}.$$

Odpowiedź: Młotek spadnie w odległości $8,7$ m, a mała kula w odległości $8,5$ m od osi dużej kuli.

Rozwiązanie zadania 3

Zadanie dotyczy w swej istocie ściskania mimośrodowego słupów. Wzór na naprężenia normalne σ w skrajnych włóknach jego przekroju ma postać:

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{P\,e}{W}\,. \tag{1}$$

We wzorze tym poszczególne symbole oznaczają: P – pionowa siła ściskająca, e – mimośród działania tej siły względem osi słupa (kolumny), A – pole przekroju słupa (kolumny), W – wskaźnik wytrzymałości przekroju słupa (kolumny).

Pole przekroju A betonowego przekroju słupa jest równe:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(0,50^2 - 0,44^2\right) = 0,0443\ \mathrm{m}^2. \tag{2}$$

Wskaźnik wytrzymałości W przekroju kręgu betonowego można obliczyć ze wzoru

$$W = \frac{\pi}{32}\frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi}{32}\frac{0,05^4 - 0,44^4}{0,50} = 0,0049062\ \mathrm{m}^3. \tag{3}$$

Ciężar własny G jednego kręgu betonowego o wysokości h jest równy:

$$G = A\, h\, \rho = 0,0443 \cdot 2,0 \cdot 24 = 2,1264\ \mathrm{kN}. \tag{4}$$

Najniekorzystniejsza sytuacja panuje w poziomie pierwszego od góry złącza, ponieważ w niższych poziomach ciężar własny kolumny jest większy (największy jest w poziomie terenu).

Dlatego sprawdzenia należy dokonać w poziomie odległym o h od wierzchu kolumny. Ponieważ warunkiem jest, aby w złączu nie wystąpiło rozciąganie, to trzeba założyć, że w skrajnym wypadku $\sigma = 0$.

Z (1), (2), (3) i (4) mamy więc:

$$0 = \frac{G}{A} + \frac{P}{A} \pm \frac{P\,e}{W} = \frac{2,1264}{0,0443} + \frac{6,0}{0,0443} \pm \frac{6,0 \cdot e}{0,0049062}\,. \tag{5}$$

Wystarczy w równaniu (5) przyjąć znak $(-)$, bo nie może wystąpić rozciąganie. Mamy więc:

$$1222,9423 \cdot e = 48,0 + 135,4492 \tag{6}$$

Skąd $e = 0,1500\ \mathrm{m} = 15\ \mathrm{cm}$.

Rozwiązanie zadania z optymalizacji

Oznaczenia:

$X > 0$ – ilość półproduktu $P1$,

$Y > 0$ – ilość półproduktu $P2$.

Funkcją celu jest koszt zakupu obu półfabrykatów:

$$K = 25 \cdot X + 15 \cdot Y\,.$$

Należy znaleźć minimum tej funkcji znając ograniczenia związane z wymaganą ilością poszczególnych składników w wyprodukowanym preparacie:
dla składnika A:

$$0,7 \cdot X + 0,3 \cdot Y \geq 30\ , \tag{1}$$

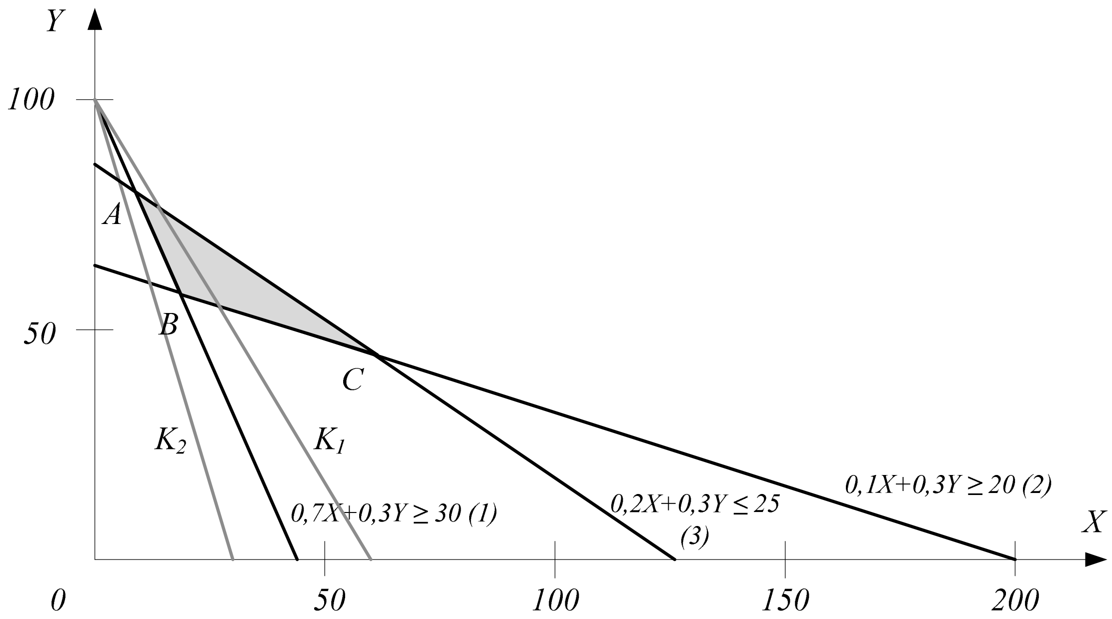
dla składnika B:

$$0,1 \cdot X + 0,3 \cdot Y \geq 20\ , \tag{2}$$

dla składnika C:

$$0,2 \cdot X + 0,3 \cdot Y \leq 25\ . \tag{3}$$

Do rozwiązania nierówności ($1 \div 3$) można wykorzystać metodę wykreślną.



Nierówności (1), (2), (3) są spełnione we wnętrzu i na obrzeżach trójkąta ABC.

Na rysunku naniesiono również przykładową linię $K1$ opisującą funkcję celu. Punkt odpowiadający najniższym kosztom zakupu półproduktów to punkt B leżący na przecięciu linii (1) i linii (2).

$$0,7 \cdot X + 0,3 \cdot Y = 30\ , \tag{4}$$

$$0,1 \cdot X + 0,3 \cdot Y = 20\ , \tag{5}$$

stąd $X_B = 16,7$ kg i $Y_B = 61,1$ kg.

Jeżeli cena półproduktu $P1$ wzrośnie dwukrotnie funkcja celu będzie miała postać:

$$K = 50 \cdot X + 15 \cdot Y\ ,$$

i opisuje ją linia K_2. W tym wypadku punkt odpowiadający najniższym kosztom zakupu to punkt A leżący na przecięciu linii (1) i linii (3).

$$0,7 \cdot X + 0,3 \cdot Y = 30\,, \tag{6}$$

$$0,2 \cdot X + 0,3 \cdot Y = 25\,, \tag{7}$$

stąd $X_A = 10,0$ kg i $Y_A = 76,7$ kg.

Rozwiązanie zadania z zastosowania informatyki

Przykładowy program w języku Fortran:

```
program olimp
Real, Dimension(10)::X,Y,S
Real, Dimension(10,10)::OD,OD1
Integer, Dimension(10)::Nr,Np
call srand(0.0)
do i=1,10
   Nr(i)=i
   X(i)=rand(0.0)*100
   Y(i)=rand(0.0)*100
   ZnakX=rand(0.0)
   ZnakY=rand(0.0)
   if (ZnakX<0.5) then
      X(i)=-X(i)
   end if
   if (ZnakY<0.5) then
      Y(i)=-Y(i)
   end if
end do
Write(*,*)
Write(*,*)
Write(*,77)(Nr(i),i=1,10)
Write(*,*)'X'
Write(*,99)(X(i),i=1,10)
Write(*,*)'Y'
Write(*,99)(Y(i),i=1,10)
```

```
      do i=1,10
         do j=1,10
            OD(i,j)=sqrt((X(i)-X(j))**2+(Y(i)-Y(j))**2)
            OD1(i,j)=OD(i,j)
         end do
      end do
      do i=1,10
         S(i)=0
         do j=1,10
            S(i)=S(i)+OD(i,j)
         end do
      end do
100   L=0
      do i=1,9
         if (S(i)>S(i+1)) then
            a=S(i+1)
            N=Nr(i+1)
            S(i+1)=S(i)
            Nr(i+1)=Nr(i)
            S(i)=a
            Nr(i)=N
            L=1
         end if
      end do
      if (L==1) then
         go to 100
      end if
      write(*,*) 'Sumy odlegoŁci '
      Write(*,*)
      do i=1,10
         Write(*,88) Nr(i),S(i)
      end do
      Write(*,*)
      do i=1,10
         OD(i,i)=300
      end do
      Dr=0
      licz=Nr(1)
```

```
      do k=1,10
         Smin=300
         Np(k)=licz
         do i=1,10
            if (OD(licz,i)<Smin) then
               Smin=OD(licz,i)
               Num=i
            end if
         end do
         Dr=Dr+Smin
         do i=1,10
            OD(i,licz)=300
         end do
         licz=Num
      end do
      Write(*,*)
      write(*,*) 'Przez punkty najblisze droga wynosi :',Dr
      Write(*,77)(Np(i),i=1,10)
      Dr=0
      licz=Nr(1)
      do k=1,10
         Smax=0
         Np(k)=licz
         do i=1,10
            if (OD1(licz,i)>Smax) then
               Smax=OD1(licz,i)
               Num=i
            end if
         end do
         Dr=Dr+Smax
         do i=1,10
            OD1(i,licz)=0
         end do
         licz=Num
      end do
      Write(*,*)
      write(*,*) 'Przez punkty najdalsze droga wynosi :',Dr
      Write(*,77)(Np(i),i=1,10)
99    Format(1x,10F7.1)
88    Format(1x,I3,F7.1)
77    Format(1x,'prowadzi przez punkty:'10I3)
      end
```