XLI OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody II stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy elektryczno-elektronicznej

Rozwiązanie zadania 1

Ciepło potrzebne do zagotowania 1 l wody w warunkach jak w zadaniu:

$$Q_1 = c\, m \triangle T = 4187 \cdot 1 \cdot 77 = 322399 \text{ J} = 322,399 \text{ kJ}, \tag{1}$$

gdzie

$$\triangle T = T_w - T_p = 100 - 23 = 77 \text{ K}, \tag{2}$$

masa wody

$$m = \rho\, V = 1 \cdot 1 = 1 \text{ kg}. \tag{3}$$

Energia pobrana przez czajnik z grzałką o większej mocy podczas gotowania wody:

$$E_{C1} = \left(\frac{U_{ns}}{U_{n1}}\right)^2 P_{n1}\, t_0 = \left(\frac{230}{250}\right)^2 \cdot 2200 \cdot 3,5 \cdot 60 = 0,8464 \cdot 2200 \cdot 210 = 391,083 \text{ kJ}, \tag{4}$$

gdzie $U_{ns} = 230$ V – znamionowe napięcie fazowe sieci elektroenergetycznej.

Energia E_{c1} jest sumą energii potrzebnej do zagotowania wody Q_1 oraz energii strat E_{s1}.

$$E_{c1} = Q_1 + E_{s1}\,. \tag{5}$$

Znając wartości E_{c1} oraz Q_1 sprawność energetyczną czajnika można obliczyć ze wzoru:

$$\eta = \frac{Q_1}{E_{c1}} = \frac{322,399}{391,083} \approx 0,8244\,. \tag{6}$$

Patronem honorowym OWT jest Minister Gospodarki.
Organizatorem OWT jest Federacja Stowarzyszeń Naukowo-Technicznych NOT.
Olimpiada jest finansowana ze środków MEN.

Wiedząc, że moc grzejna mniejszej grzałki przy zasilaniu z sieci elektroenergetycznej jest równa:

$$P_2 = \left(\frac{U_{ns}}{U_{n2}}\right)^2 P_{n2} = \left(\frac{230}{240}\right)^2 \cdot 1500 = 0,9184 \cdot 1500 = 1377,6 \text{ W}, \tag{7}$$

energię pobraną z sieci zasilającej, przez czajniki z grzałką o mniejszej mocy, potrzebną do zagotowania 1 l wody można obliczyć ze wzoru:

$$E_{C2} = \eta \, P_2 \, t_X \, . \tag{8}$$

Energia ta jest równa energii Q_1 (1). Zatem czas potrzebny do zagotowania wody grzałką o mniejszej mocy jest równy:

$$t_x = \frac{Q_1}{\eta \, P_2} = \frac{322399}{0,8244 \cdot 1377,6} \approx 284 \text{ s} = 4 \text{ min.}\ 44 \text{ s.} \tag{9}$$

Zagotowanie wody w czajniku z grzałką o mniejszej mocy trwa dłużej o czas $\triangle t$:

$$\triangle t = t_x - t_0 = 284 - 3,5 \cdot 60 = 284 - 210 = 74 \text{ s} = 1 \text{ min.}\ 14 \text{ s.} \tag{10}$$

Ilość wody jaką można zagotować w czajniki z grzałką o większej mocy w czasie t_x można obliczyć ze wzoru:

$$c \, m_x \triangle T = \eta \left(\frac{U_{ns}}{U_{n1}}\right)^2 P_{n1} \, t_x \, , \tag{11}$$

$$m_x = \frac{\eta \left(\frac{U_{ns}}{U_{n1}}\right)^2 P_{n1} \, t_x}{c \triangle T} = \frac{0,8244 \cdot 0,8464 \cdot 2200 \cdot 283,79}{4187 \cdot 77} = 1,35 \text{ kg.} \tag{12}$$

Zatem do tego czajnika należy dolać $\triangle m = m_x - m = 1,35 - 1 = 0,35$ kg lub $0,35\, l$ wody.

Odp: Czas gotowania wydłuży się o 1 min. 14 s. Do czajnika należy dolać 0,35 kg ($0,35\, l$) wody. Sprawność czajnika jest równa 82,44%.

Rozwiązanie zadania 2

1. Pojemność kondensatora płaskiego (rys.1a) można obliczyć ze znanego wzoru:

$$C = \frac{\varepsilon \, S_C}{d} \, . \tag{1}$$

Energia zgromadzona w polu elektrycznym tego kondensatora jest równa:

$$W_C = \frac{C\,U^2}{2}\,. \tag{2}$$

Ponieważ zastosowany w kondensatorze dielektryk z poliamidu ma wytrzymałość elektryczną K_u to maksymalne napięcie jakie można przyłożyć do tego kondensatora jest równe:

$$U_{max} = K_u\,d\,.$$

Zatem maksymalna energia pola elektrycznego jest równa:

$$W_{Cmax} = \frac{\varepsilon\,S_C\,\left(K_u\,d\right)^2}{2\,d} = \frac{\varepsilon\,K_u^2}{2}\,S_C\,d = \frac{\varepsilon\,K_u^2}{2}\,V_C\,, \tag{3}$$

gdzie V_C – objętość kondensatora (dielektryka).

Masę kondensatora można wyznaczyć ze wzoru:

$$m_C = V_C\,\rho_p\,. \tag{4}$$

Zatem stosunek maksymalnej energii pola elektrycznego zgromadzonej w kondensatorze do masy kondensatora jest równy:

$$\frac{W_{Cmax}}{m_C} = \frac{\frac{\varepsilon\,K_u^2}{2}\,V_C}{V_C\,\rho_p} = \frac{\varepsilon\,K_u^2}{2\,\rho_p} = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_R\,K_u^2}{2\,\rho_p} = \tag{5}$$

$$= \frac{2,6\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot\left(140\cdot 10^6\right)^2}{2\cdot 900} = 250\ \mathrm{J/kg}\,.$$

2. Indukcyjność dławika (rys.1.b) jest równa:

$$L = \frac{\mu_0\,S_L\,z^2}{l} = \frac{\mu_0\,\pi\,r^2\,z^2}{l}\,. \tag{6}$$

Energię zgromadzoną w polu magnetycznym dławika można obliczyć ze wzoru:

$$W_L = \frac{L\,I^2}{2}\,. \tag{7}$$

Z praw przepływu wiadomo, że:

$$H\,l = I\,z\,. \tag{8}$$

Ponieważ indukcja magnetyczna, po uwzględnieniu (8) jest równa:

$$B = \mu_0\,H = \frac{\mu_0\,I\,z}{l}\,, \tag{9}$$

to przekształcając zależność (9) i wstawiając z zależności (2 z treści zadania) maksymalną wartość indukcji B_{max}:

$$B_{max} = \sqrt{2\,\sigma_{max}\,\mu_0\,\frac{\triangle\,r}{r}}\,, \tag{10}$$

można obliczyć maksymalny prąd dławika:

$$I_{max} = \frac{B_{max}\,l}{\mu_0\,z} = \frac{\sqrt{2\,\sigma_{max}\,\mu_0\,\frac{\triangle\,r}{r}}\;l}{\mu_0\,z}\,. \tag{11}$$

Zatem maksymalna energia pola magnetycznego zgromadzona w dławiku indukcyjnym jest równa:

$$W_{Lmax} = \frac{L\,I^2_{max}}{2} = \frac{\mu_0\,\pi\,r^2\,z^2}{2\,l}\,\frac{2\,\sigma_{max}\,\mu_0\,\frac{\triangle\,r}{r}\,l^2}{\mu_0^2\,z^2} = \pi\,\sigma_{max}\,l\,r\,\triangle\,r\,. \tag{12}$$

Masa dławika:

$$m_L = V_L\,\rho_{Cu} \cong 2\,\pi\,r\,l\,\triangle\,r\,\rho_{Cu}\,. \tag{13}$$

Stosunek maksymalnej energii pola magnetycznego zgromadzonej w dławiku indukcyjnym do masy tego dławika jest zatem równy:

$$\frac{W_{Lmax}}{m_L} = \frac{\pi\,\sigma_{max}\,l\,r\,\triangle\,r}{2\,\pi\,r\,l\,\triangle\,r\,\rho_{Cu}} = \frac{\sigma_{max}}{2\,\rho_{Cu}} = \frac{5\cdot 10^7}{2\cdot 9\cdot 10^3} = 2780\ \mathrm{J/kg}. \tag{14}$$

3. Maksymalna energia kinetyczna wirującej masy jest równa:

$$W_{Kmax} = \frac{J\,\omega^2_{max}}{2}\,. \tag{15}$$

Podstawiając do wzoru (15) kwadrat maksymalnej prędkości kątowej, który po uwzględnieniu zależnosci (3 z treści zadania) jest równy

$$\omega_{max}^2 = \frac{v_{max}^2}{R^2} = \frac{\sigma_{rmax}}{\rho_w R^2}, \tag{16}$$

stosunek maksymalnej energii kinetycznej wirującego walca do masy m_w tego walca można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{W_{Kmax}}{m_w} = \frac{\frac{m_w R^2}{2} \sigma_{rmax}}{m_w \rho_w R^2} = \frac{\sigma_{rmax}}{2 \rho_w} = \frac{2,4 \cdot 10^9}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^3} = 800000 \text{ J/kg}. \tag{17}$$

Odp. Stosunek maksymalnej energii jaką można zgromadzić w zasobniku do masy zasobnika jest równy: a) dla kondensatora 250 J/kg, b) dla dławika indukcyjnego 2780 J/kg, c) dla wirującej masy 800000 J/kg. Jak wynika z obliczeń najlepszym zasobnikiem energii wśród omawianych w zadaniu jest koło zamachowe. Pierwsze dwa zasobniki (kondensator i dławik) są urządzeniami statycznymi natomiast zasobnik z wirującą masą wymaga zastosowania specjalnej konstrukcji wysokosprawnej maszyny elektrycznej pracującej w układzie silnik – prądnica. Jest to najdroższy z zaprezentowanych w zadaniu sposobów magazynowania energii elektrycznej. Najtańszym, ale także najmniej efektywnym zasobnikiem jest kondensator.

Rozwiązanie zadania 3

Z treści zadania wynika, że podane liczby zapisane w systemie liczbowym o podstawie p spełniają następująca zależność matematyczną:

$$\frac{3002}{200} = 13,01\ . \tag{1}$$

Można zatem napisać równanie:

$$\frac{3 \cdot p^3 + 0 \cdot p^2 + 0 \cdot p^1 + 2 \cdot p^0}{2 \cdot p^2 + 0 \cdot p^1 + 0 \cdot p^0} = 1 \cdot p^1 + 3 \cdot p^0 + 0 \cdot p^{-1} + 1 \cdot p^{-2} \tag{2}$$

Po wymnożeniu obu stron równania (2) przez $2\,p^2$ przyjmie ono postać:

$$3\,p^3 + 2 = 2\,p^3 + 6\,p^2 + 2\,. \tag{3}$$

Po uporządkowaniu:

$$p^3 - 6\,p^2 = 0\,. \tag{4}$$

Równanie ma trzy rozwiązania: $p_1 = p_2 = 0$ oraz $p_3 = 6$.

Odp. Poszukiwany system liczbowy ma podstawę $p = 6$, a poszukiwana liczba (zapisana w systemie dziesiętnym) to $9\,\frac{1}{36}$ lub $\frac{325}{36}$.

Rozwiązanie zadania z optymalizacji

Oznaczenia:

x – liczba wytworzonych jednostek produktu O_1

y – liczba wytworzonych jednostek produktu O_2

x i y liczby całkowite, dodatnie.

Funkcja celu – zysk zakładu Z:
oznaczając przez k cenę jednostki produktu O_2

$$Z = 2 \cdot k \cdot x + k \cdot y\,.$$

Ograniczenia związane z wielkością zapasów magazynowych:
dla S_1:

$$12 \cdot x + 5 \cdot y \le 60 \qquad \frac{x}{5} + \frac{y}{12} \le 1\,. \tag{1}$$

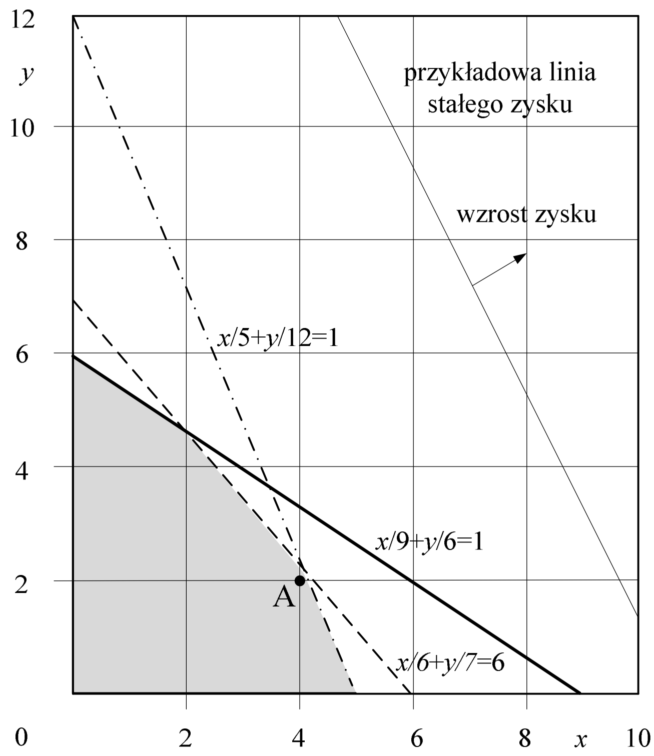
dla S_2:

$$7 \cdot x + 6 \cdot y \le 42 \qquad \frac{x}{6} + \frac{y}{7} \le 1\,. \tag{2}$$

dla S_3:

$$6 \cdot x + 9 \cdot y \le 54 \qquad \frac{x}{9} + \frac{y}{6} \le 1\,. \tag{3}$$

Rozwiązania nierówności (1) $\div$ (3) poszukuje się wykorzystując metodę wykreślną.



Obszar dopuszczalnych rozwiązań oznaczono na rysunku zacienionym polem. Naniesiono również na wykresie przykładową linię odpowiadającą stałemu zyskowi. Przesuwając tę linię w kierunku zacienionego pola widać, że pierwszym punktem o całkowitych wartościach współrzędnych w obszarze zacienionym jest punkt A. Odpowiada on największemu zyskowi możliwemu do uzyskania i stąd jest poszukiwanym rozwiązaniem. Współrzędne punktu A: $x = 4$, $y = 2$.

Odp: Maksymalny zysk zapewnia wyprodukowanie 4 jednostek produktu O_1 i 2 jednostek produktu O_2.

Rozwiązanie zadania z zastosowania informatyki

Dla siatki przedstawionej na rys.1. w treści zadania tablica wyjściowa będzie miała postać:

1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1

Opis algorytmu:

Działanie programu można przedstawić jako następującą sekwencję czynności:

1. Wczytaj siatkę (wystarczy zapamiętać tylko numery węzłów w elementach lub nawet wykonywać zawartość pętli 3 w trakcie czytania)

2. Zainicjuj pustą listę przechowującą niezerowe elementy tablicy

3. Zapamiętaj elementy niezerowe:

   - Iteruj po elementach
     - Iteruj po węzłach elementu (i)
       - Iteruj po węzłach elementu (j)
         - Zapisz niezerowy element (i, j)

4. Posortuj listę niezerowych elementów tablicy

5. Wypisz wzór wypełnienia tablicy:

   - Iteruj po wierszach tablicy (i)
     - Iteruj po kolumnach (j)
       - jeśli element (i, j) znajduje się na liście wypisz 1
       - jeśli go nie ma – wypisz 0
     - Wypisz znak nowego wiersza

Największą trudnością jest odpowiednie przechowanie listy niezerowych elementów. Według efektywności możliwe rozwiązania można uszeregować następująco:

1. Hasz (tablica mieszająca) – rozwiązanie najlepsze

2. Drzewo poszukiwań binarnych (BST) lub dynamiczna tablica sortowana szybkim algorytmem sortowania – rozwiązanie średnie

3. Lista liniowa – rozwiązanie dostateczne

Przykładowy kod:
(Język C, bez wykorzystywania żadnych bibliotek poza standardową, przechowywanie elementów niezerowych w prostym haszu, niemal bez diagnostyki błędów)

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define MIN(i,j) ((i)<(j)?(i):(j))
/* mniejsza z dwóch liczb */
#define MAX(i,j) ((i)>(j)?(i):(j))
/* większa z dwóch liczb */
/* dynamiczny wektor przechowujący niezerowe elementy jednego wiersza */
typedef struct {
   int v;
/* elementy */
   size_t s;
/* wielkość v */
   size_t n;
/* wypełnienie v */
} darr_t;

void resize_darr( darr_t *da ) {
/* powiększanie (dwukrotne) dynamicznego wektora */
   int *nv = realloc( da->v, 2*da->s*sizeof *nv );
   if( nv == NULL ) {
      fprintf( stderr, "Error in resize_darr\n" );
      exit( EXIT_FAILURE );
   }
   da->s *= 2;
}

int exist( darr_t *hash, int _i, int _j ) {
/* czy hasz przechowuje niezerowy element (i,j) ?*/
/* zwraca 1 jeśli tak, 0 jeśli nie */
   int i = MIN(_i,_j);
   int j = MAX(_i,_j);
   int k;
   for( k= 0; k < hash[i].n; k++ )
      if( hash[i].v[k] == j )
         return 1;
   return 0;
}
```

```
void add_non_zero( darr_t *hash, int _i, int _j ) {
/* dodanie elementu (i,j) do hasza */
   int i = MIN(_i,_j);
   int j = MAX(_i,_j);
   if( ! exist( hash,  i, j ) ) {
      if( hash[i].n == hash[i].s )
         resize_darr( hash+i );
      hash[i].v[hash[i].n++]= j;
   }
}

int main( int argc, char **argv ) {
   int n1, n2, n3;
   int nn;
   int ne;
   double x,y;
   FILE *in = argc > 1 ? fopen( argv[1], "r" ) : stdin;
   int i,j;
   darr_t *hash;
   fscanf( in, "%d", &nn );
/* czytamy liczbę węzłów */
   hash = malloc( nn * sizeof *hash );
   for( i= 0; i < nn; i++ ) {
      hash[i].v = malloc( 8*sizeof *hash[i].v );
      hash[i].s = 8;
      hash[i].n = 0;
   }
   for( i= 0; i < nn; i++ ) {
/* pomijamy współrzędne */
      fscanf( in, "%lf %lf", &x, &y );
   }
   fscanf( in, "%d", &ne );
/* czytamy liczbę elementów */
   for( i= 0; i < ne; i++ ) {
/* czytamy nr-y węzłów w elementach
   i od razu zapamiętujemy niezerowe elementy tablicy */
      fscanf( in, "%d %d %d", &n1, &n2, &n3 );
      add_non_zero( hash, n1, n2 );
      add_non_zero( hash, n1, n3 );
      add_non_zero( hash, n2, n3 );
   }
   fclose( in );
/* zamykamy plik wejściowy */
```

```
   for( i= 1; i <= nn; i++ ) {
/* pętla po wierszach tablicy */
      for( j= 1; j < i; j++ )
/* pętla po kolumnach przed diagonalą */
         if( exist( hash, i, j ) )
            printf( " 1" );
         else
            printf( " 0" );
      printf( " 1" );
/* element diagonalny jest zawsze niezerowy */
      for( j= i+1; j <= nn; j++ )
/* pętla po kolumnach za diagonalą */
         if( exist( hash, i, j ) )
            printf( " 1" );
         else
            printf( " 0" );
         printf( "\n" );
   }
   for( i= 0; i < nn; i++ )
/* zwolnienie pamięci */
      free( hash[i].v );
   free( hash );
   return EXIT_SUCCESS;
}
```