

XXXV OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

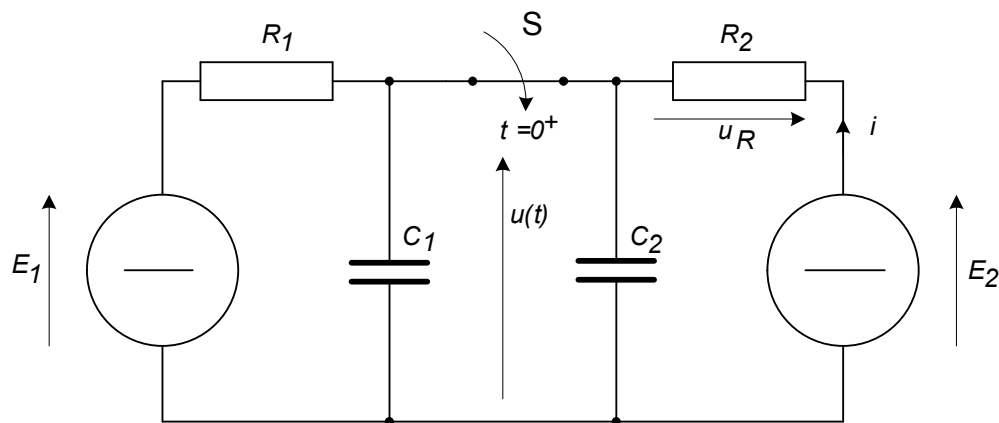


Zawody II stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy elektryczno-elektronicznej

Rozwiązanie zadania 1

Przed załączeniem łącznika S kondensator C_1 naładuje się do wartości napięcia źródła $E_1 = -6\text{ V}$, a kondensator C_2 do wartości napięcia źródła $E_2 = 12\text{ V}$.



Rys.1. Schemat układu po załączeniu łącznika S

W chwili $t(0^+)$ (rys.1), tuż po załączeniu łącznika S , napięcie $U(0^+)$ na połączonych równolegle kondensatorach o wypadkowej pojemności:

$$C = C_1 + C_2 = 20\ \mu\text{F} + 2 \cdot 20\ \mu\text{F} = 60\ \mu\text{F},$$

można wyznaczyć korzystając z zasady zachowania ładunku:

$$E_1 C_1 + E_2 C_2 = C U(0^+).$$

Patronem medialnym Olimpiady Wiedzy Technicznej jest „Przegląd Techniczny”

Stąd

$$U(0^+) = \frac{E_1 C_1 + E_2 C_2}{C} = \frac{-6 \cdot 20 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}{60 \cdot 10^{-6}} = 6 \text{ V}.$$

Przebieg napięcia $u(t)$ na kondensatorach można wyznaczyć korzystając z zasady superpozycji stanu ustalonego i stanu przejściowego:

$$u(t) = U_u + u_p(t).$$

Składową ustaloną U_u napięcia $u(t)$ można wyznaczyć przyjmując, że w stanie ustalonym kondensatory stanowią przerwę w obwodzie. Zatem, gdy $t \rightarrow \infty$ oraz $i = I_u$ można np. napisać:

$$E_2 - U_R - U_u = 0,$$

gdzie

$$U_R = I_u R_2, \quad I_u = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}.$$

Zatem

$$U_u = E_2 - \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} R_2 = 12 - \frac{12 + 6}{1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3} \cdot 1 \cdot 10^3 = 3 \text{ V}.$$

Składowa przejściowa $u_p(t)$ opisana jest równaniem:

$$u_p(t) = U_p(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

a ponieważ:

$$U(0^+) = U_u + U_p(0^+),$$

to wartość początkowa składowej przejściowej jest równa

$$U_p(0^+) = U(0^+) - U_u = 6 - 3 = 3 \text{ V}.$$

Dla tej składowej źródła napięcia stałego E_1 i E_2 stanowią zwarcie, zatem iloczyn wypadkowej rezystancji R , połączonych równolegle rezystorów R_1 i R_2 , oraz wypadkowej pojemności C , kondensatorów C_1 i C_2 , określa stałą czasową przeładowania τ :

$$\tau = C R = (C_1 + C_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = (20 \cdot 10^{-6} + 40 \cdot 10^{-6}) \cdot \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3} = 30 \text{ ms}.$$

Przebieg napięcia $u(t)$ zawierający, składową ustaloną i składową przejściową, jest zatem opisany wzorem:

$$u(t) = \left(3 + 3 e^{-33,3 t} \right) \text{ V}.$$

Rozwiązanie zadania 2

Prąd znamionowy silnika I_{aN} jest równy:

$$I_{aN} = \frac{P_N}{\eta U_N} = \frac{1000}{0,8 \cdot 100} = 12,5 \text{ A}.$$

Iloczyn $C_e \cdot \Phi$, przyjmując parametry znamionowe maszyny, jest równy:

$$C_e \cdot \Phi = \frac{U_N - I_{aN} R_a}{n_N} = 0,0875 \frac{\text{V}}{\frac{\text{obr}}{\text{min}}}.$$

Zatem prędkość biegu jałowego można obliczyć z zależności:

$$n_0 = \frac{U}{C_e \Phi} = \frac{100}{0,0875} = 1143 \frac{\text{obr}}{\text{min}}.$$

Wstawiając prędkość obrotową w obr/min i moc znamionową w kW moment znamionowy silnika w Nm oblicza się ze wzoru:

$$M_n = \frac{9549 \cdot P_N}{n_N} = \frac{9549 \cdot 1}{1000} = 9,549 \text{ Nm}.$$

Iloczyn $C_e \cdot \Phi$ jest zatem równy:

$$C_e \cdot \Phi = \frac{M_N}{I_{aN}} = \frac{9,549}{12,5} = 0,764 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}.$$

Prąd rozruchu jest równy:

$$I_{ar} = \frac{U}{R_a} = \frac{100}{1} = 100 \text{ A}.$$

Moment rozruchowy można zatem obliczyć z zależności:

$$M_r = C_m I_{ar} \Phi = 0,764 \cdot 100 = 76,4 \text{ Nm}.$$

Prędkość obrotową w stanie pracy prądnicowej, jeżeli do sieci płynie prąd znamionowy maszyny I_{aN} , można obliczyć ze wzoru:

$$n = \frac{U + I_{aN} R_a}{C_e \cdot \Phi} = \frac{100 + 12,5 \cdot 1}{0,0875} = 1286 \frac{\text{obr}}{\text{min}}.$$

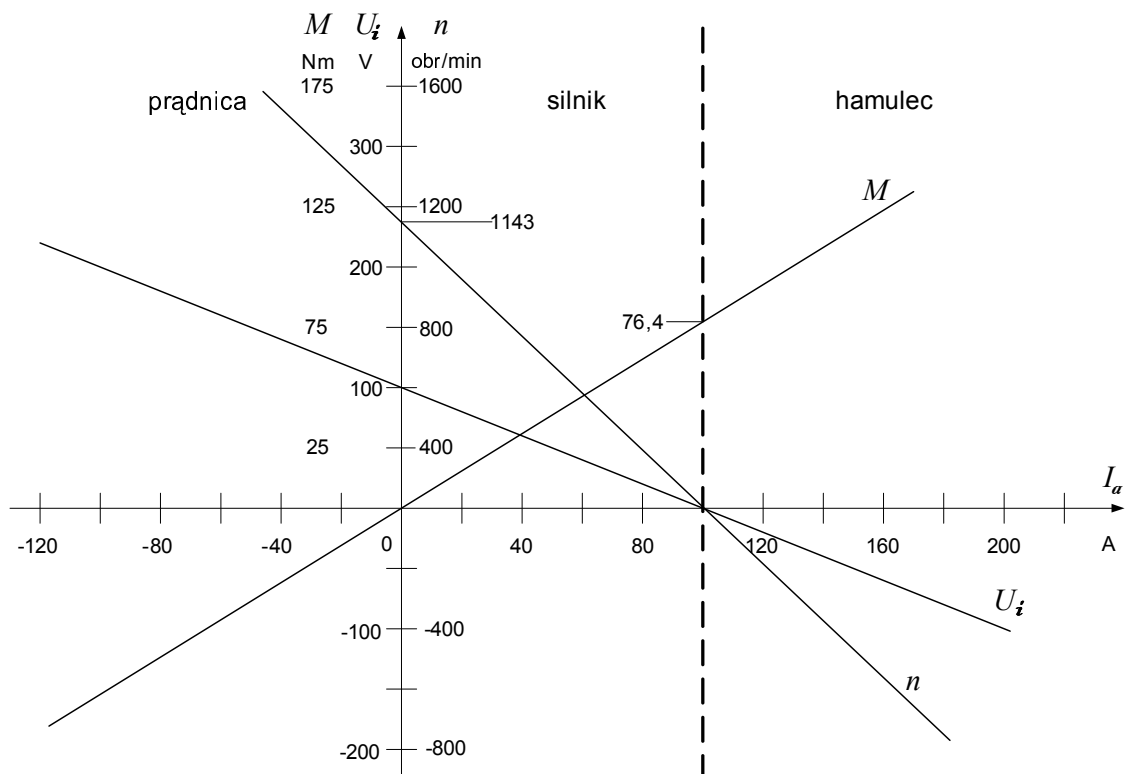
Charakterystyki maszyny w trzech strefach pracy przedstawiono na rys.1.
Skale osi:

M – 25 Nm/działkę,

n – 200 obr/min/działkę,

U_i – 50 V/działkę,

I_A – 20 A/działkę.



Rys.1. Charakterystyki maszyny w trzech strefach pracy

Tabela 1

Strefa pracy maszyny	prądnica	silnika	hamulec
*Napięcie indukowane w wirniku U_i	$U_i = U + I_a R_a$	$U_i = U - I_a R_a$	$U_i = -U + I_a R_a$
**Relacje między prędkościami n i n_0	$n > n_0$	$0 < n < n_0$	$n < 0$
**Relacje między momentami M i M_r	$M < 0$	$0 < M < M_r$	$M > M_r$
**Relacje między prądami I_a i I_{ar}	$I_a < 0$	$0 < I_a < I_{ar}$	$I_a > I_{ar}$

Rozwiązanie zadania 3

Wartości rezystancji termistora odczytane z charakterystyki $R_t = f(\vartheta)$ podano w Tabeli 1.

Tabela 1

ϑ °C	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
R_t Ω	6000	4000	2100	1200	800	550	330	200	110	75	50	31	11

Ad a) Napięcie U_1 sterujące wzmacniaczem operacyjnym można obliczyć z zależności:

$$U_1 = \frac{E}{R_t + R} R - \frac{E}{R_t + R} R_t = \frac{R - R_t}{R_t + R} E.$$

Polaryzacja napięcia U_1 zależy od relacji między wartościami rezystancji R i R_t ,

gdy $R_t > R$ $U_1 < 0$,

gdy $R_t < R$ $U_1 > 0$.

Z warunków zadania wynika, że dla temperatury $\vartheta = 40^\circ\text{C}$, dla której rezystancja termistora $R_t = 200 \Omega$, napięcie U_1 powinno spełniać warunek $U_1 = 0$.

Warunek ten jest spełniony, gdy $R = R_t = 200 \Omega$.

Ad b) W celu ograniczenia zjawiska samo podgrzewania się termistora należy zgodnie z charakterystyką $U = f(I)$ przyjąć, że w zadanym zakresie temperatur pracy czujnika, w najniekorzystniejszych warunkach (tzn., gdy $\vartheta = 90^\circ\text{C}$) przez termistor może płynąć prąd nie większy niż $I_{max} = 10 \text{ mA}$.

Zakładając, że prąd w dowolnej gałęzi mostka jest równy $I = I_{max} = 10 \text{ mA}$ maksymalne napięcie źródła zasilania E_{max} ma wartość:

$$E_{max} = I_{max} (R + R_{90}) = 0,01 \cdot (200 + 11) = 2,11 \text{ V}.$$

Warunki zadania spełnia np. dioda referencyjna o napięciu 1,25 V.

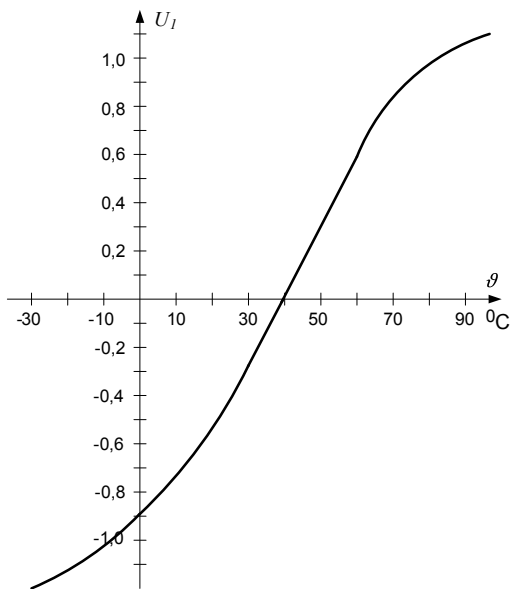
Ad c) Przyjmując wartość napięcia źródła zasilającego mostek pomiarowy $E = 1,25 \text{ V}$ współrzędne punktów charakterystyki $U_1 = f(\vartheta)$ można wyznaczyć posługując się Tabelą 1 z zależności:

$$U_1 = \frac{R - R_t}{R_t + R} E.$$

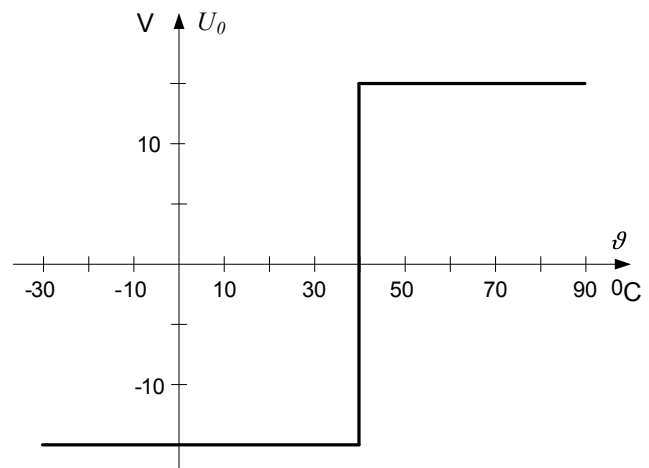
Wyniki obliczeń przedstawiono w Tabeli 2, a charakterystykę $U_1 = f(\vartheta)$ na rys.1.

Tabela 2

$\vartheta \text{ } ^\circ\text{C}$	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$U_1 \text{ V}$	-1,17	-1,13	-1,03	-0,89	-0,75	-0,58	-0,31	0	0,54	0,57	0,75	0,91	1,12



Rys.1. Charakterystyka $U_1 = f(\vartheta)$



Rys.2. Charakterystyka $U_0 = f(\vartheta)$

Charakterystykę $U_0 = f(\vartheta)$ przedstawiono na rys.2.

Rozwiązanie zadania z optymalizacji

W tabeli 1 zapisano łączne koszty produkcji i transportu przy kooperacji filii F_i i zakładu Z_j

Tabela 1

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
F_1	120	90	140	60
F_2	100	110	70	90
F_3	70	80	120	50
F_4	50	90	70	110

W celu rozwiązania problemu należy, korzystając z tabeli 1, sporządzić roboczą tabelę 2, w której wartości X_{ij} , czyli liczby podzespołów produkowanych w filii F_i dostarczanych do zakładu Z_j , będą dobierane w ten sposób, aby można było wybrać warianty o najniższym

koszcie $K(F_i; Z_j)$,

Tabela 2

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	produkcja
F_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	60
F_2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	45
F_3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	75
F_4	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	50
dostawa	80	50	60	30	

a ponadto, żeby spełnione były nierówności:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 60$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 45$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 75$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} \leq 50$$

i równania:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 80$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 50$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 60$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 30$$

Funkcja celu ma postać:

$$\text{Koszt} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 K(F_i, Z_j) \cdot X_{ij}.$$

Wypełniona tabela 2, w pierwszej wersji, może mieć zatem postać jak w tabeli 3
Tabela 3

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	produkcja
F_1					60
F_2			45 ⁽³⁾		45
F_3				30 ⁽²⁾	75
F_4 dostawa	50 ⁽¹⁾ 80				50

W nawiasach podany numer kroku.

By uniknąć wysokich kosztów związanych z uzupełnieniem dostawy do zakładu Z_3 przez filie F_1 lub F_3 wprowadza się w 5 kroku do tabeli 3 korektę (tabela 4).

Tabela 4

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	produkcja
F_1		50 ⁽⁷⁾			60
F_2			45 ⁽³⁾		45
F_3	45 ⁽⁶⁾			30 ⁽²⁾	75
F_4	35 ⁽⁵⁾		15 ⁽⁴⁾		50
dostawa	80	50	60	30	

Łączna suma minimalnych kosztów produkcji i transportu jest zatem równa:

$$\text{Koszt} = 45 \cdot 70 + 35 \cdot 50 + 50 \cdot 90 + 45 \cdot 70 + 15 \cdot 70 + 30 \cdot 50 = 15100 \text{ zł}.$$

Przedstawiona metoda rozwiązania zadanie nie jest jedyną. Można tu wykorzystać metodę Simplex lub tzw. algorytm transportowy.

Jest to również idealny przykład na zastosowanie narzędzia Solver w Excelu, w takim przypadku otrzymuje się w tym zadaniu trochę inny rozkład dostaw, ale o tym samym koszcie minimalnym.

Rozwiązanie zadania z zastosowania informatyki

Algorytm obliczeń

- Wczytać liczbę wierzchołków.
- Wczytać współrzędne kolejnych wierzchołków wielokąta.
- Podzielić wielokąt na trójkąty o jednym wspólnym wierzchołku (np. może to być pierwszy wczytany wierzchołek wielokąta).
- Kolejno dla wszystkich trójkątów obliczyć:
 - długość boków,
 - powierzchnię (np. ze wzoru Herona),
 - współrzędne środków dwu z trzech boków trójkąta,
 - równania dwu środkowych,
 - współrzędne środka ciężkości leżącego na przecięciu się środkowych,

- Obliczyć pole powierzchni wielokąta jako sumę powierzchni trójkątów,
- Obliczyć położenie środka ciężkości kolejno
 - dwóch pierwszych trójkątów,
 - dwóch pierwszych trójkątów i trzeciego,
 - trzech pierwszych trójkątów i czwartego itd.
- Wydrukować wartość powierzchni i współrzędne środka ciężkości wielokąta.

Przykład programu (język C)

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
double A[50][5],B[3][5];
FILE *p;
void wczytanie_danych(int);
void dlugosci_bokow(int);
void pole(int);
void srodki_bokow(int);
void srodek_ciezkosci(int);
void wyniki(int);
void main()
{
/* Dane wczytywane są z pliku ‘‘Dane.dat’’. Wczytywana      *
 * jest liczba wierzchołków, a następnie współrzędne x i y *
 * kolejnych wierzchołków - tablica A. Istotą algorytmu    *
 * jest podział wielokąta na trójkąty dla których jednym z *
 * wierzchołków jest zawsze pierwszy wierzchołek wielokąta *
 * (A[0][0], A[0][1]). Współrzędne wierzchołków tych      *
 * trójkątów wprowadzone są do roboczej tablicy B.        *
 * Obliczane jest pole trójkąta i położenie jego środka   *
 * ciężkości. Z tych danych w funkcji ‘‘Wyniki’’ obliczane *
 * jest pole i położenie środka ciężkości całego wielokąta.*
*/

int n,n1,k;
p=fopen("D:\\Dane.dat","r");
fscanf(p,"%d",&n);
n1=n-2;
wczytanie_danych(n);
A[n][0]=A[0][0];

```

```

A[n][1]=A[0][1];
B[0][0]=A[0][0];
B[0][1]=A[0][1];
for(k=1;k<=n1;k++)
{
    B[1][0]=A[k][0];
    B[1][1]=A[k][1];
    B[2][0]=A[k+1][0];
    B[2][1]=A[k+1][1];
    dlugosci_bokow(k);
    pole(k);
    srodki_bokow(k);
    srodek_ciezkosci(k);
}
wyniki(n1);
return;
}

void wczytanie_danych(int n)
{
    int i;
    for(i=0;i < n;i++)
    fscanf(p,"%lf%lf",&A[i][0],&A[i][1]);
    return;
}

void dlugosci_bokow(int k)
{
    int i;
    double x,y;
    for(i=0;i < 2;i++)
    {
        x=B[i+1][0]-B[i][0];
        y=B[i+1][1]-B[i][1];
        B[i][2]=sqrt(x*x+y*y);
    }
    x=B[2][0]-B[0][0];
    y=B[2][1]-B[0][1];
    B[2][2]=sqrt(x*x+y*y);
    return;
}

```

```

void pole(int k)
{
    int i;
    double ob=0,pl;
    for(i=0;i < =2;i++)
        ob=ob+B[i][2];
    ob=0.5*ob;
    pl=ob;
    for(i=0;i < 3;i++)
        pl=pl*(ob-B[i][2]);
    pl=sqrt(pl);
    A[k-1][2]=pl;
    return;
}

void srodki_bokow(int k)
{
    int i;
    for(i=0;i < 2;i++)
    {
        B[i][3]=0.5*(B[i+1][0]+B[i][0]);
        B[i][4]=0.5*(B[i+1][1]+B[i][1]);
    }
    B[2][3]=0.5*(B[2][0]+B[0][0]);
    B[2][4]=0.5*(B[2][1]+B[0][1]);
    return;
}

void srodek_ciezkosci(int k)
{
    int i=0;
    double a1,a2,b1,b2,m1,m2,W,Wx,Wy;
    m1=B[0][0]-B[1][3];
    m2=B[1][0]-B[2][3];
    a1=(B[0][1]-B[1][4])/m1;
    a2=(B[1][1]-B[2][4])/m2;
    b1=(B[1][3]*B[0][1]-B[0][0]*B[1][4])/m1;
    b2=(B[2][3]*B[1][1]-B[1][0]*B[2][4])/m2;
    W=a2-a1;
    Wx=b2-b1;
    Wy=a1*b2-a2*b1;
    A[k-1][3]=Wx/W;
    A[k-1][4]=Wy/W;
}

```

```

    return;
}

void wyniki(int n1)
{
    int i;
    double x,y,F;
    F=A[0][2];
    x=A[0][3];
    y=A[0][4];
    for (i=1;i < =n1;i++)
    {
        x=x*F+A[i][3]*A[i][2];
        y=y*F+A[i][4]*A[i][2];
        F=F+A[i][2];
        x=x/F;
        y=y/F;
    }
    printf(" Wspolrzedne srodka ciezkosci\n");
    printf("\n\n x=%lf y=%lf\n\n",x,y);
    printf(" Pole\n");
    printf("\n\n F=%lf\n\n\n",F);
    return;
}

```